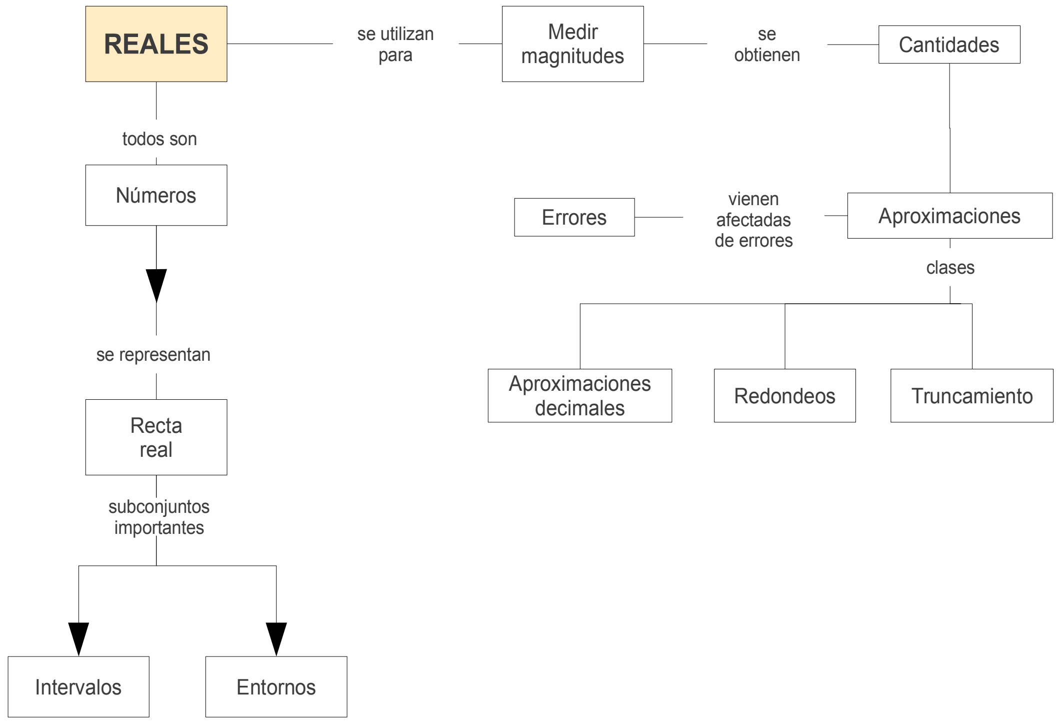
Tema 1: Números reales.



Repaso

Potencias y raíces

Propiedades de las potencias:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad a^c \cdot b^c = (ab)^c$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \qquad \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

$$(a^b)^c = a^{b\cdot c} \qquad a^{-b} = \frac{1}{a^b} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c$$

Propiedades de los radicales:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^b} = a^{b/n} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n\cdot p]{a} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^b}\right)^c = \sqrt[n]{a^{b\cdot c}} \qquad b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^b} = \sqrt[n/c]{a^{b/c}}$$

Racionalización:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{a^b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^b}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-b}}}{\sqrt[n]{a^{n-b}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-b}}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \qquad \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b} \qquad \frac{1}{a-\sqrt{b}} = \frac{1}{a-\sqrt{b}} \cdot \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$$

Notación científica

$$a\cdot 10^n \quad , \text{con} \quad a\in\mathbb{R}, 1\le a<10 \quad \text{y} \quad n\in\mathbb{N}$$

Operaciones:

$$a\cdot 10^n+b\cdot 10^n-c\cdot 10^n=(a+b-c)\cdot 10^n \quad ; \quad \frac{(a\cdot 10^n)\cdot(b\cdot 10^p)}{c\cdot 10^q}=\left(\frac{a\cdot b}{c}\right)\cdot 10^{n+p-q} \quad ;$$

$$(a\cdot 10^n)^p=a^p\cdot 10^{n\cdot p}$$

Logaritmos

$\log_b a=c \Leftrightarrow b^c=a$

$\log a=c \Leftrightarrow 10^c=a$

$\ln a=c \Leftrightarrow e^c=a$

$\log_b a\cdot c=\log_b a+\log_b c$

$\log_b \frac{a}{c}=\log_b a-\log_b c$

$\log_b a^n=n\log_b a$

El conjunto de los números reales.

Los números naturales sirven para contar los elementos de un conjunto y ordenarlos. Representamos el conjunto de todos los números naturales por $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,...\}$

El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) está formado por los números naturales y por sus opuestos: $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,...\}$

Los números que se pueden expresar en forma de fracción son los números racionales ($\mathbb{Q}$). Cuando nos los encontramos en su forma decimal pueden ser decimales exactos o decimales periódicos (puros o mixtos): $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}; a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$

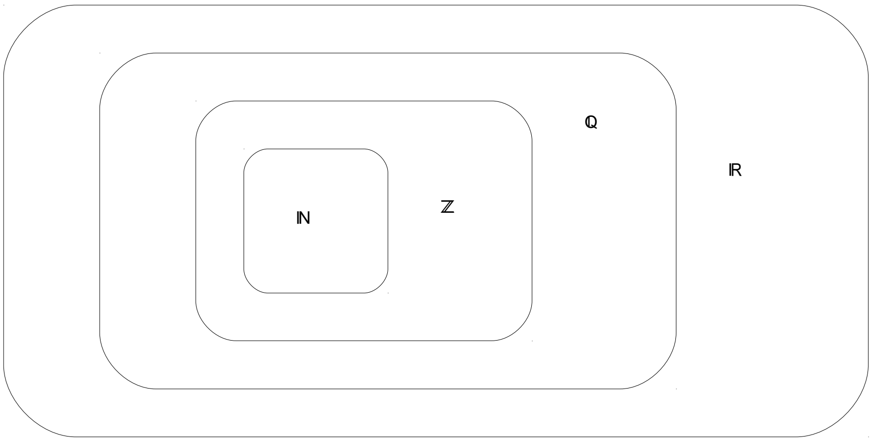
Decimos que el conjunto de los números racionales es **denso** porque entre dos números racionales hay infinitos números raiconales.

Aquellos números que no pueden expresarse en forma de fracción son los irracionales ($\mathbf{I}$) . Éstos son números con infinitas cifras decimales no periódicas.

El conjunto de los números reales se representa por $\mathbb{R}$, y está formado por los números racionales ($\mathbb{Q}$) y los irracionales (**I**): $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup I$. Los números reales permiten resolver algunos problemas que no tenían solución entre los números racionales, como el cálculo de la superficie y el volumen de una esfera.

Los números reales pueden representarse sobre una recta: La Recta Real. Dados un Origen y una Unidad, a cada punto de la recta le corresponde un número y a cada número le corresponde un punto en la recta. A cada punto de esta recta le corresponde un número racional o irracional. Decimos que los números reales completan la recta.

Podemos representar todos los conjuntos numéricos en el siguiente esquema:



$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

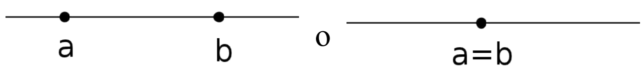
Al operar con números reales podemos hacerlo de dos formas: de forma exacta, para lo cual tendremos que trabajar con radicales simplificándolos lo más posible; de forma aproximada, en ese caso es necesario conocer el error cometido.

Conjuntos en la recta real.

Dentro de la recta real podemos definir una serie de subconjuntos entre los que están los **intervalos**. Su definición está basada en la relación de orden de los números reales:

Un número real *a* es menor o igual que otro número real *b* si en la representación sobre la recta real el número *a* está a la izquierda o superpuesto al número *b*:

$a \leq b \Leftrightarrow$



Intervalo abierto de extremos *a* y *b*: conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*.

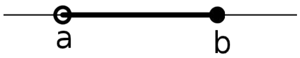
$(a,b)=\{x\in \mathbb{R}/a<x<b\}$

Intervalo cerrado de extremos *a* y *b*: conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b* e incluídos estos.

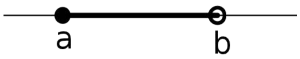
$[a,b]=\{x\in \mathbb{R}/a\le x\le b\}$

Podemos encontrarnos intervalos **semiabiertos** o **semicerrados**, en ese caso sólo uno de los extremos estará incluído dentro del conjunto:

$[a,b]=\{x\in \mathbb{R}/a<x\le b\}$

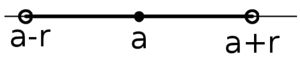


$[a,b]=\{x\in \mathbb{R}/a\le x<b\}$



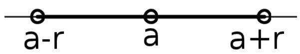
Otro tipo de subconjuntos que podemos encontrar en la recta real son los **entornos**. Para definirlos debemos especificar un **centro** y un **radio**. El radio del entorno es la distancia desde el centro a cada uno de los extremos del mismo (recordamos que la distancia entre dos números reales es el valor absoluto de su diferencia: $d(a,b)=|b-a|$).

Un entorno de centro a y radio r es el conjunto de números reales cuya distancia al centro **a** es menor que el radio **r**: $E(a,r)=\{x\in \mathbb{R}:d(a,x)<r\}=\{x\in \mathbb{R}:|x-a|<r\}=(a-r,a+r)$



Un entorno reducido de centro a y radio r es un entorno al que se le ha quitado el centro:

$E^*(a,r)=E(a,r)-\{a\}=(a-r,a+r)-\{a\}=(a-r,a)\cup(a,a+r)$



Aproximaciones

Los números irracionales y los números decimales periódicos tienen infinitas cifras decimales por ello deberemos trabajar con aproximaciones de los mismos.

El orden de una aproximación es el número de cifras que tomamos del número original. Podemos encontrarnos con dos tipos de aproximaciones:

Aproximación decimal de orden n por defecto: número decimal con **n** cifras de forma que coinciden con las n primeras cifras del número original.

Aproximación decimal de orden n por exceso: número decimal con **n** cifras de forma que las n-1 primeras cifras coinciden con las del número original y la última cifra es una unidad mayor.

Por ejemplo:

Aproximación decimal de orden 5 por defecto del número π *: 3.1415*

Aproximación decimal de orden 5 por exceso del número π *: 3.1416*

Las aproximaciones de un número se pueden realizar de diferentes formas:

La aproximación por **redondeo de orden n** de un número es la mejor aproximación decimal de orden n que se puede hacer de ese número.

Para redondear nos tenemos que fijar en la cifra siguiente a la que da el orden de aproximación, si esta cifra es menor que 5, la aproximación será por defecto, y si ésta es mayor o igual a 5, la aproximación decimal será por exceso.

El **truncamiento de orden n** de un número es su aproximación decimal por defecto de orden n.

Errores

Al hacer aproximaciones (ya sean por exceso o por defecto) estamos cometiendo errores. Es necesario ser conscientes de este hecho y conocer cuál es el error cometido.

Decimos que el **error absoluto** (E_A)de una aproximación es la diferencia en valor absoluto entre el valor real (V_R)y el valor aproximado (V_A). $\boldsymbol{E_A = |V_R - V_A|}$

La **cota de error absoluto** es un número que verifica: $|\boldsymbol{V_R - V_A}| <$ **cota de error**

La cota de error de una aproximación decimal de orden n es una unidad de ese orden.

La cota de error de un redondeo de orden n es media unidad de ese orden.

Por ejemplo:

$\varphi = 1.61803\ldots$

Truncamiento: 1.61	*Error absoluto: 0.00803...*	*Cota de error: 0.01*
Redondeo a décimas: 1.6	*Error absoluto: 0.01803...*	*Cota de error:* $\frac{0.01}{2} = 0.005$

El error absoluto en ocasiones no nos da suficiente información sobre si una aproximación es buena (no es lo mismo cometer un error de 1 cm en la medida de una pared o en la de una hoja de papel). Una idea de la bondad de una aproximación viene dada por el **error relativo** (E_R) que es la relación enetre el error absoluto y el valor real del número.

$$E_R = \frac{E_A}{V_R}$$