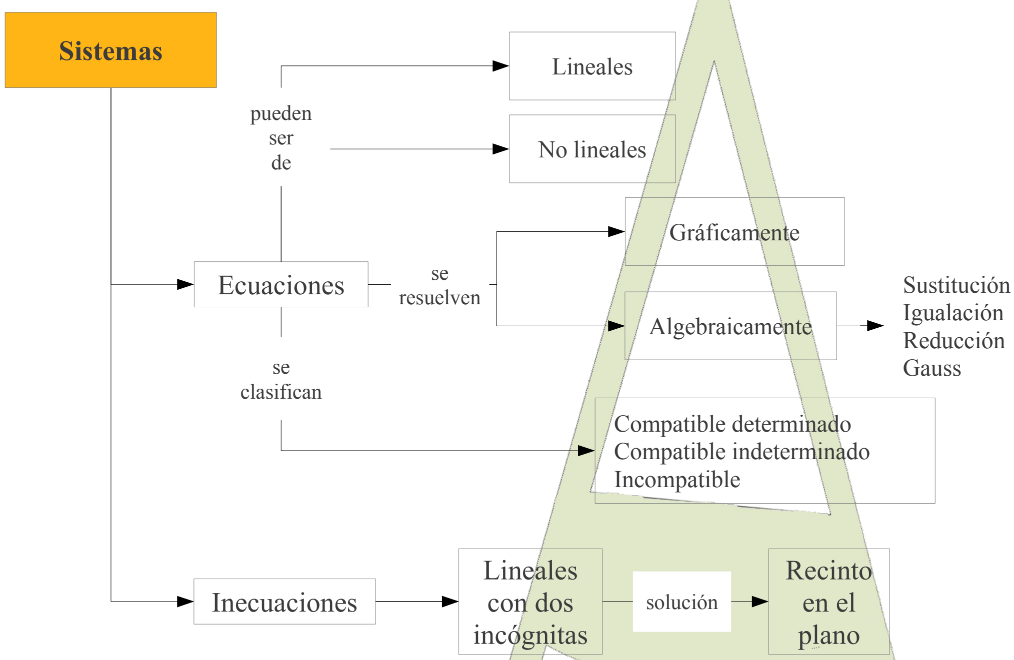
Tema 4: Sistemas de ecuaciones e inecuaciones



Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un **conjunto** de ecuaciones con varias incógnitas.

Una solución del sistema es un conjunto de valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

Si **todas** las ecuaciones del sistema son lineales (grado 1), decimos que tenemos un **sistema lineal de ecuaciones**. Si al menos una de las ecuaciones es de grado superior, el sistema no es lineal.

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales utilizaremos los métodos de **sustitución** o de **igualación**.

Por ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=289 \\ x+y=23 \end{array}\right\}$

Despejamos una de las incógnitas en la segunda ecuación: y=23-x

sustituimos en la primera ecuación: $x^2+(23-x)^2=289 \rightarrow 2x^2-46x+240=0$

$$\rightarrow x=\frac{46\pm\sqrt{46^2-4\cdot 2\cdot 240}}{2\cdot 2}\rightarrow\begin{cases} x_1=8 \\ x_2=15 \end{cases}$$

Si $x_1=8 \Rightarrow y=23-8=15$

Si $x_2=15 \Rightarrow y=23-15=8$

Por lo que las posibles soluciones son (8,15) y (15,8).

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales con varias incógnitas. En general, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_1 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ son las incógnitas

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ son los coeficientes

$b_1, b_2, \dots, b_m$ son los términos independientes

Las ecuaciones las denotamos por E_i (ecuación que ocupa el lugar i).

Una solución del sistema es un conjunto de valores para las incógnitas que al ser sustituidos en las ecuaciones las verifican **todas**. Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar **todas** las soluciones.

Sistemas de ecuaciones equivalentes

Dos **sistemas** son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**. Dos sistemas pueden ser equivalentes incluso aunque no tengan el mismo número de ecuaciones.

Podemos obtener sistemas equivalentes haciendo determinadas operaciones:

- Cambiando el orden de las ecuaciones.
- Multiplicando o dividiendo los dos miembros de una de las ecuaciones por un mismo número distinto de cero.
- Sustituyendo una de las ecuaciones por la suma de ella con una combinación lineal de las demás.
- Eliminando una ecuación que sea combinación lineal de las demás.

Por ejemplo:

Sea el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+3y-2z=3 \\ x+y+z=2 \\ 2x+4y-z=5 \end{array}\right\}$

Obtenemos un sistema equivalente intercambiando la primera y la tercera ecuación:

$$E_1 \Leftrightarrow E_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4y-z=5 \\ x+y+z=2 \\ x+3y-2z=3 \end{array}\right\}$$

Obtenemos un sistema equivalente multiplicando la segunda ecuación por 5:

$$E'_2=5E_2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=3 \\ 5x+5y+5z=10 \\ 2x+4y-z=5 \end{array}\right\}$$

Obtenemos un sistema equivalente sumando a la primera ecuación una combinación lineal de la segunda y la tercera:

$$E'_1=E_1+2E_2-3E_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x-7y+3z=-8 \\ x+y+z=2 \\ 2x+4y-z=5 \end{array}\right\}$$

Obtenemos un sistema equivalente eliminando la tercera ecuación ya que es una combinación lineal de las otras dos:

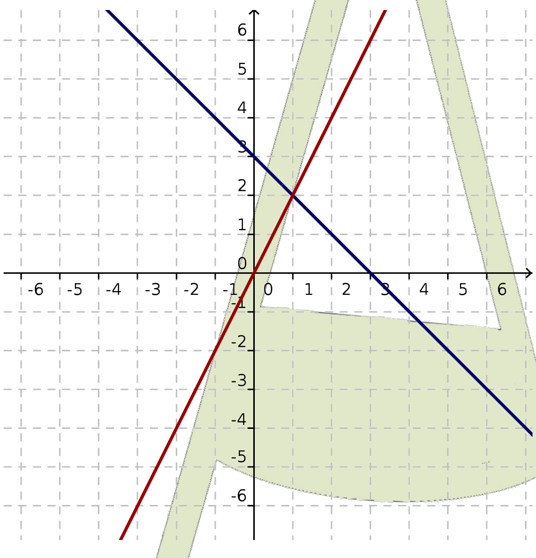
$$E_3=E_1+E_2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=3 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

Resolución gráfica de sistemas lineales con dos incógnitas.

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones se representan en los mismos ejes coordenados cada una de las rectas asociadas a las ecuaciones. El punto de corte de las rectas es la solución del sistema.

Por ejemplo:

Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$



El punto de corte de las dos rectas es (1,2) por lo que ésta es la solución: x=1, y=2.

Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones

Para resolver algebraicamente los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ya conoces los métodos de **sustitución**, **igualación** y **reducción**:

- **Método de sustitución**: consiste en despejar una de las incógnitas de una ecuación y sustituirla en la otra.
- **Método de igualación**: se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualen las expresiones obtenidas.
- **Método de reducción**: se suman o restan las ecuaciones de forma que una de las incógnitas se elimina tras esta operación.

En los tres métodos se obtiene una sola ecuación con una incógnita, se resuelve y después se halla el valor para la otra incógnita.

Para escoger el método de resolución más apropiado deberemos fijarnos en el sistema de ecuaciones:

- ➔ Si una de las incógnitas está despejada o es muy sencillo despejarla en una de las ecuaciones, usaremos el método de sustitución.
- ➔ Si una de las incógnitas está despejada en las dos ecuaciones, resolvemos por el método de igualación.
- ➔ Si alguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente (o el opuesto) en ambas ecuaciones, usaremos el método de reducción.

Por ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$

Si sumamos las dos ecuaciones: $3x=3 \Rightarrow x=1$

despejando de la segunda ecuación: $y=2x \Rightarrow y=2\cdot 1=1$

La solución del sistema es x=1, y=2.

Método de Gauss

Un **sistema escalonado** tiene la siguiente forma: $\left.\begin{array}{r} ax+by+cz=d \\ ey+fz=g \\ hz=j \end{array}\right\}$.

Este tipo de sistemas de ecuaciones es muy sencillo de resolver ya que se van despejando las incógnitas desde la última ecuación (en la que prácticamente está despejada) hasta la primera.

Por ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=5 \\ y+3z=5 \\ 3z=6 \end{array}\right\}$

*Despejamos **z** de la tercera ecuación:*

$$z=\frac{6}{3}=2$$

*Sustituimos el valor de z en la segunda ecuación y despejamos **y**:*

$$y+3\cdot 2=5\rightarrow y=5-6=-1$$

*Sustituimos los valores obtenidos en la primera ecuación y despejamos **x**:*

$$3x+2\cdot(-1)-2=5\rightarrow x=\frac{5+2+2}{3}=3$$

El **método de Gauss** para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en aplicar reiteradamente el método de reducción al sistema de ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones equivalente al inicial que sea escalonado.

Utilizaremos las transformaciones adecuadas para obtener otro sistema equivalente: cambio, multiplicación o división por un número, combinación lineal.

Por ejemplo:

Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r}2x+y-3z=1\\ x-2y+4z=19\\ 3x+4y-z=1\end{array}\right\}$

$$E_1\Leftrightarrow E_2\rightarrow \left.\begin{array}{r}x-2y+4z=19\\ 2x+y-3z=1\\ 3x+4y-z=1\end{array}\right\}$$

$$E'_2=E_2-2E_1\rightarrow \left.\begin{array}{r}x-2y+4z=19\\ 5y-11z=-37\\ 3x+4y-z=1\end{array}\right\}$$

$$E'_3=E_3-3E_1\rightarrow \left.\begin{array}{r}x-2y+4z=19\\ 5y-11z=-37\\ 10y-13z=-56\end{array}\right\}$$

$$E'_3=E_3-2E_2\rightarrow \left.\begin{array}{r}x-2y+4z=19\\ 5y-11z=-37\\ 9z=18\end{array}\right\}$$

Despejamos z: $z=\frac{18}{9}=2$

Sustituimos en la segunda ecuación y despejamos y: $y=\frac{-37+11\cdot 2}{5}=-5$

sustituimos en la primera ecuación y despejamos x: $x=19-4\cdot 2+2\cdot 5=21$

Clasificación de sistemas de ecuaciones

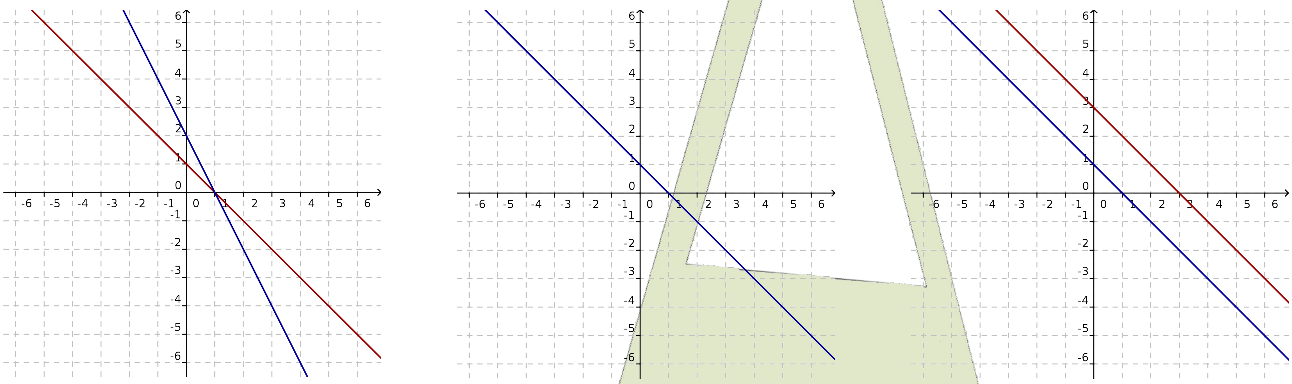
Los sistemas de ecuaciones se clasifican en función del número de soluciones que tiene:

Sistema compatible determinado: el sistema tiene una **única** solución.

Sistema compatible indeterminado: tiene **infinitas** soluciones.

Sistema incompatible: **no** tiene solución.

Cuando resolvemos gráficamente un sistema de ecuaciones tenemos las siguientes posibilidades:



Sistema compatible determinado | Sistema compatible indeterminado | Sistema incompatible

Cuando resolvemos por el método de Gauss un sistema de ecuaciones nos encontramos situaciones como las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=4 \\ 2y-z=5 \\ 2z=6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=4 \\ 2y-z=5 \\ 0=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=4 \\ 2y-z=5 \\ 2=6 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible determinado | Sistema compatible indeterminado | Sistema incompatible

Sistemas de inecuaciones

Un **sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas** es un conjunto de inecuaciones de primer grado de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by\geq c \\ dx+ex\geq f \end{array}\right\}$$

La solución de un sistema de inecuaciones está formado por las soluciones que verifican a la vez todas las inecuaciones. Al conjunto solución se le llama **región factible**.

Para resolver el sistema de inecuaciones representamos en los mismos ejes las rectas correspondientes a las igualdades, la solución es la parte del plano que verifica las dos condiciones a la vez.