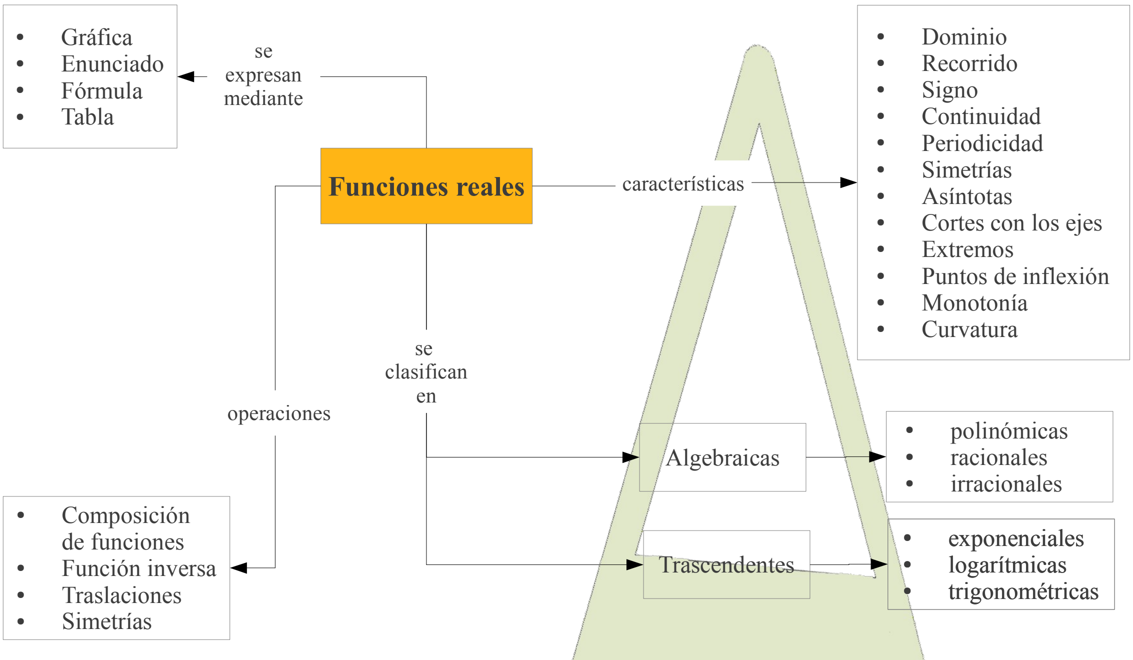
Tema 5: Funciones



- Funciones reales de variable real
- Dominio y recorrido
- Crecimiento. Concavidad
- Extremos
- Simetrías
- Periodicidad
- Trasformaciones de funciones
- Operaciones con funciones
- Composición de funciones
- Función inversa

Funciones reales de variable real

Se llama función real, f, de variable real a una correspondencia en la que todo elemento del conjunto inicial de números reales está relacionado con un único número real.

$$\begin{aligned} f: A \in \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

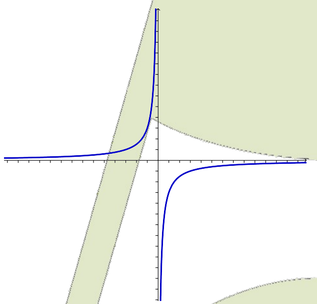
En una función intervienen dos variables, una independiente (**x**) y otra dependiente (**y**).

Una función puede expresarse de diferentes formas:

- Mediante una tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	2	8	18	32	50

- Mediante una gráfica:



- Mediante una fórmula:

$$y = x^3 + 3x - 5$$

- Mediante un enunciado:

"El precio de la gasolina es de 1,39 € por cada litro"

Las cuatro formas de expresar una función son equivalentes, aunque no siempre es posible pasar de una forma a otra:

- Un conjunto de pares siempre se puede representar gráficamente, pero no siempre se ajusta a una fórmula o puede darse mediante un enunciado comprensivo.

  El describir una función mediante un conjunto de pares presenta el inconveniente de que difícilmente podremos escribir todos y cada uno de los pares que la componen.

- Si la función viene dada mediante una gráfica o curva es fácil determinar los pares ordenados: cada punto de la gráfica define uno de ellos. Sin embargo expresarla mediante una fórmula es prácticamente imposible, salvo que esa curva sea conocida.

- Con la expresión analítica de una función se resuelven las dificultades anteriores. La función y=f(x) siempre puede expresarse en las demás formas.

  El conjunto de pares equivalentes a y=f(x) es $f=\{x,f(x)\}$.

- Si la función viene dada mediante una frase habitualmente podrá expresarse de forma analítica.

Dominio y recorrido

Sea y=f(x) una función real de variable real: $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, con y=f(x).

Se llama **dominio** de la función al conjunto de todos los valores de x para los cuales y=f(x) está definida (tiene valor real).

Gráficamente el dominio es la proyección en el eje x.

El dominio se simboliza por **Dom(f)**.

<u>Cálculo de dominios de funciones</u>:

- **Función polinómica:**

  $y=ax^n+bx^{n-1}+...+mx+n;\quad \mathbf{Dom(f)=\mathbb{R}}$

- **Función racional:**

  $y=\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1 x+b_0};\quad \mathbf{Dom(f)=\mathbb{R}-\{valores\ \ que\ \ anulan\ \ el\ \ denimonador\}}$

- **Función irracional:**

  $y=\sqrt[n]{f(x)}\quad \begin{cases} si\ \ n\ \ es\ \ par: & \mathbf{Dom(f)=Dom(f(x))} \\ si\ \ n\ \ es\ \ par: & \mathbf{Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)\geq 0\}} \end{cases}$

- **Función exponencial:**

  $y=a^{f(x)}:\quad \mathbf{Dom(f)=Dom(f(x))}$

- **Función logarítmica:**

  $y=\log_a f(x):\quad \mathbf{Dom(f)=Dom(f(x))}$

- **Funciones trigonométricas:**

$y=\operatorname{sen} f(x)$: $\mathbf{Dom(f)=Dom(f(x))}$

$y=\cos f(x)$: $\mathbf{Dom(f)=Dom(f(x))}$

$y=\operatorname{tg} f(x)$: $\mathbf{Dom(f)=Dom(f(x))-\{\cos f(x)=0\}}$

Se llama **recorrido o imagen** de la función al conjunto de valores que toma la variable dependiente y=f(x).

Gráficamente es la proyección en el eje y.

El recorrido se simboliza por **Im(f)**.

Crecimiento. Concavidad

Función creciente: $x_1, x_2 \text{ con } x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$

Función estrictamente creciente: $x_1, x_2 \text{ con } x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<(x_2)$

Función decreciente: $x_1, x_2 \text{ con } x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

Función estrictamente decreciente: $x_1, x_2 \text{ con } x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Función constante: $x_1, x_2 \text{ con } x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

Extremos

Una función f alcanza un máximo absoluto en x=a si f(a) es el mayor valor de los valores que puede tomar la función en todo su dominio.

Una función f alcanza un mínimo absoluto en x=a si f(a) es el menor valor de los valores que puede tomar la función en todo su dominio.

Una función f alcanza un máximo relativo en x=a si existe un intervalo o entorno de a tal que $f(x)\leq f(a)$ para todos los valores de x pertenecientes al entorno de a.

Una función f alcanza un mínimo relativo en x=a si existe un intervalo o entorno de a tal que $f(x)\geq f(a)$ para todos los valores de x pertenecientes al entorno de a.

Se dice que f es **acotada** en su dominio si existen dos números m y M tales que: $\mathbf{m\leq f(x)\leq M}$.

Los números M que satisfacen esta desigualdad se llaman **cotas superiores** de f. Los números m que satisfacen esta desigualdad se llaman **cotas inferiores** de f.

Se llama **extremo superior** de una función a la mínima de las cotas superiores. Si este valor lo alcanza la función se llama **máximo absoluto**.

Se llama **extremo inferior** de una función a la máxima de las cotas inferiores. Si este valor lo alcanza la función se llama **mínimo absoluto**.

Simetrías

Se dice que f es una función **par** se verifica **f(x)=f(-x)** para todo elemento x de su dominio.

Las funciones pares son aquellas cuya gráfica es simétrica respecto del eje y.

Se dice que f es una función **impar** si verifica **f(-x)=-f(x)** o f**(x)=-f(-x)** para todo elemento x de su dominio.

Las funciones impares son aquellas cuya gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Periodicidad

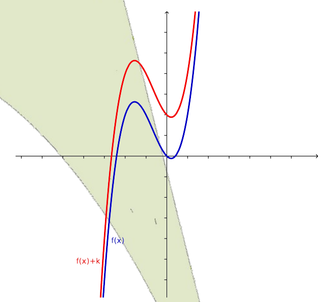
Una función f(x) es periódica de periodo T si **f(x+T)=f(x)** para todo x perteneciente al dominio de definición.

Trasformaciones de funciones

Dada una función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y un número $k\in\mathbb{R}$, pueden definirse las funciones trasladadas:

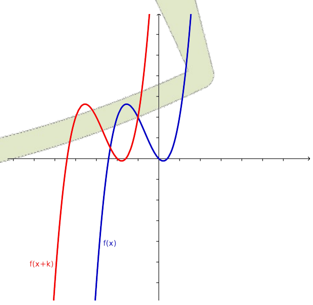
g(x)=f(x)+k

La gráfica de g se obtiene trasladando la gráfica de f verticalmente k unidades (hacia arriba si k>0 y hacia abajo si k<0)



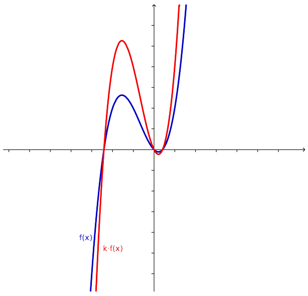
h(x)=f(x+k)

La gráfica de h se obtiene trasladando la gráfica de f horizontalmente k unidades (hacia la izquierda si k>0 y hacia la derecha si k<0)

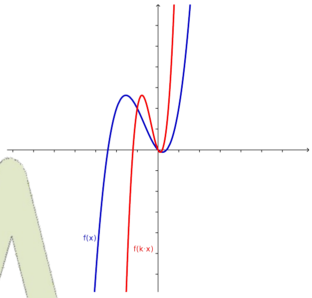


Dada una función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y un número $k\in\mathbb{R}, k>0$, pueden definirse las funciones:

$g(x)=k\cdot f(x)$



$h(x)=f(k\cdot x)$



Operaciones con funciones

Dadas las funciones $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$:

- llamamos función **suma** f+g a la que cumple:

  $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, siendo $\text{Dom}(f+g)=\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g)$

- llamamos función **diferencia** f-g a la que cumple:

  $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, siendo $\text{Dom}(f-g)=\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g)$

- llamamos función **producto** f·g a la que cumple:

  $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, siendo $\text{Dom}(f\cdot g)=\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g)$

- llamamos función **cociente** $\frac{f}{g}$ a la que cumple:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \text{ , siendo } \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)=(\text{Dom}(f)\cap\text{Dom}(g))-\{x:g(x)=0\}$$

Composición de funciones

Si $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ son dos funciones, llamamos $g\circ f$, que se lee "f compuesta con g" a la función que cumple: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

La composición de funciones no es en general conmutativa.

$$\text{Dom}(g\circ f)=\text{Dom}(f)\cap\{x:f(x)\in\text{Dom}(g)\}$$

La función llamada identidad (i(x)=x) hace de elemento neutro de la composición de funciones: $(f\circ i)(x)=(i\circ f)(x)=f(x)$

Función inversa (o recíproca)

Si $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva, existe una función $g: Im(f) \rightarrow D$, tal que $(g \circ f)(x) = i(x)$, siendo $i(x) = x, \forall x \in D$.

La función g se llama inversa de f y se representa en general por f^{-1} .

La gráfica de f y f^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.