1. Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$5x+2y-10\geq 0\,;\, x-y-2\leq 0\,;\, 3x+4y-20\leq 0\,;\, x\geq 0\,;\, y\geq 0$

a) Dibuje dicho recinto y determine sus vértices.

b) Determine en qué punto de ese recinto alcanza la función $F(x,y)=4x+3y$ el máximo valor.

a) $5x+2y-10=0$

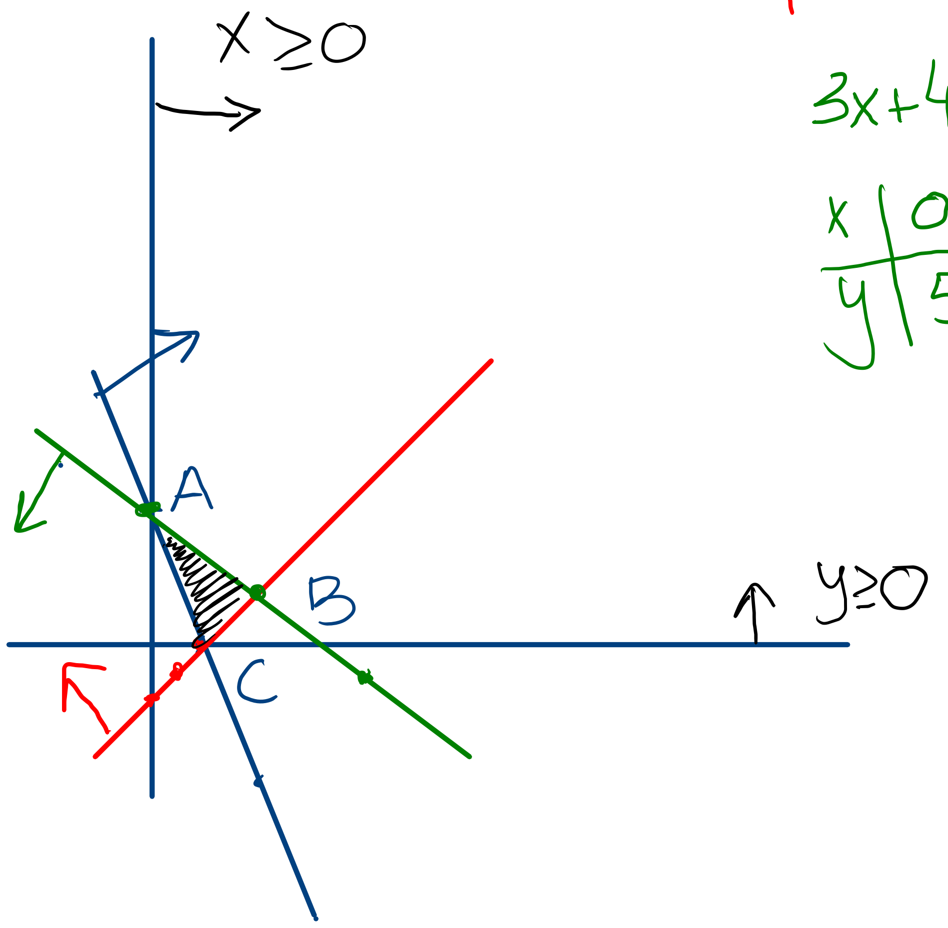
x	0	2	4
y	5	0	-5

$x-y-2=0$

x	0	1	2
y	-2	-1	0

$3x+4y-20=0$

x	0	4	8
y	5	2	-1



$A:\begin{cases}5x+2y-10=0\\3x+4y-20=0\end{cases}$ $A(0,5)$

$B:\begin{cases}3x+4y-20=0\\x-y-2=0\end{cases}$ $B(4,2)$

$C:\begin{cases}x-y-2=0\\5x+2y-10=0\end{cases}$ $C(2,0)$

b) $F(x,y)=4x+3y$

$F(0,5)=15$

$F(4,2)=22 \rightarrow$ máximo valor en el punto $(4,2)$

$F(2,0)=8$

2. Un ahorrador dispone de 10000 euros para invertir en fondos de dos tipos: A o B. La inversión en fondos A debe superar los 5000 euros y, además, ésta debe doblar, al menos, la inversión en fondos B. La rentabilidad del pasado año de los fondos A ha sido del 2.7% y la de los B ha sido del 6.3%.

Suponiendo que la rentabilidad continúe siendo la misma, determine la inversión que obtenga el máximo beneficio. Calcule este beneficio.

Fondos

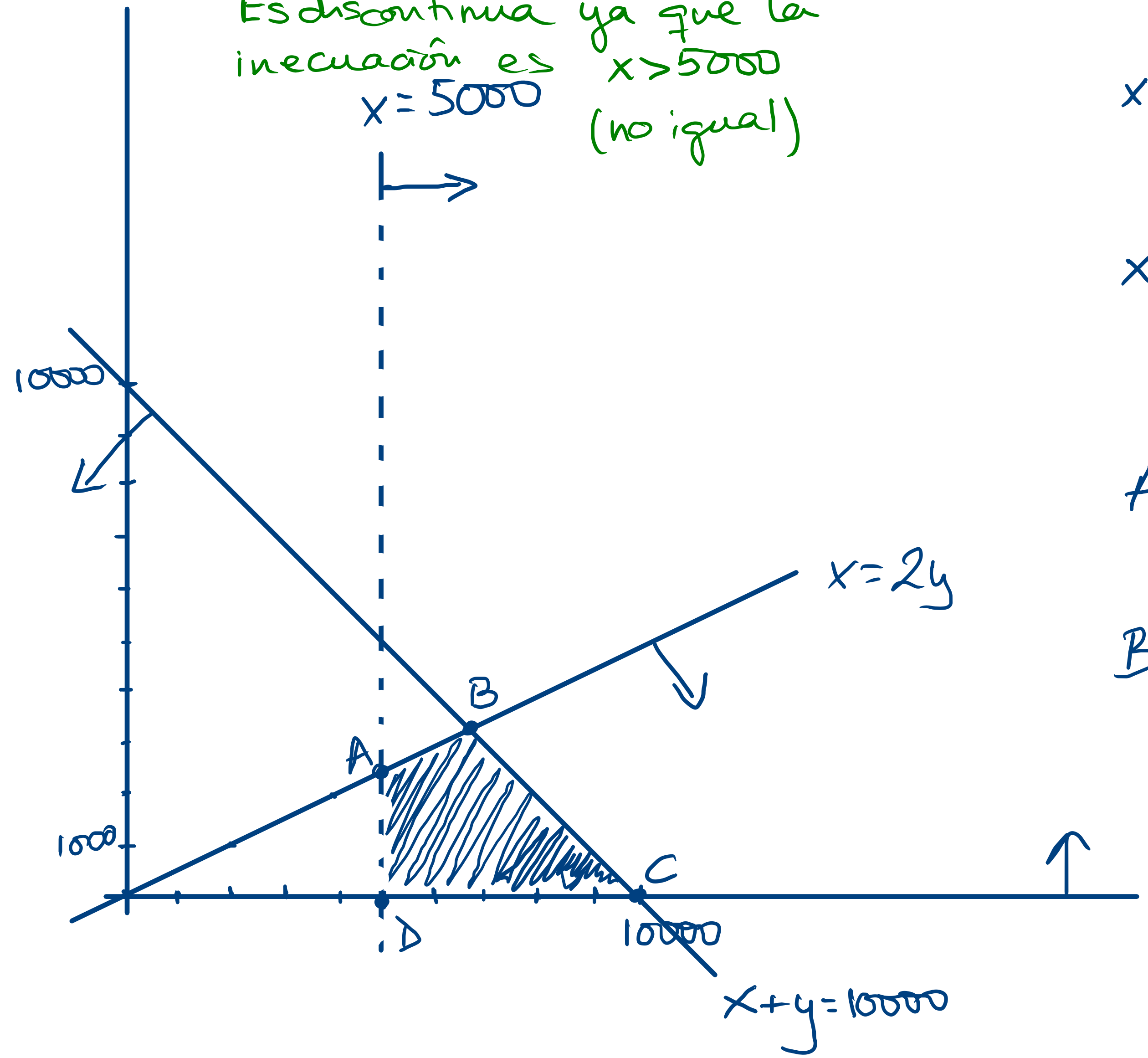
$A \rightarrow x$

$B \rightarrow y$

$$\left.\begin{array}{l} x+y \leq 10000 \\ x > 5000 \\ x \geq 2y \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Rentabilidad: $0{,}027x + 0{,}063y = f(x,y)$

Es discontinua ya que la inecuación es $x>5000$ (no igual)



$x+y=10000$

x	0	10000	5000
y	10000	0	5000

$x=2y$

x	2000	4000
y	1000	2000

$A\begin{cases} x=2y \\ x=5000 \end{cases}$ $A(5000, 2500) \rightarrow f(5000,2500) = 292{,}5$ €

$B\begin{cases} x=2y \\ x+y=10000 \end{cases}$ $B\left(\frac{20000}{3}, \frac{10000}{3}\right) \rightarrow f\left(\frac{20000}{3}, \frac{10000}{3}\right) = 390$ €

$C\begin{cases} x+y=10000 \\ y=0 \end{cases}$ $C(10000, 0) \rightarrow f(10000,0) = 270$ €

$D\begin{cases} y=0 \\ x=5000 \end{cases}$ $D(5000, 0) \rightarrow f(5000,0) = 135$ €

$\Rightarrow$ El máximo beneficio es de 390 €, invirtiendo 6666,67 € en fondos A y 3333,33 € en fondos B.

3. Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón. Se necesitan 150g de almendra y 50g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100g de almendra y 100g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es 1.75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro.

Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

	Azúcar (g)	Almendra (g)	
Tortas de almendra (x)	50	150	1,75 €
Tabletas de turrón (y)	100	100	1 €
	≤ 160 kg	≤ 240 kg	

Beneficio: $f(x,y) = 1{,}75x + 1y \rightarrow$ Máximo

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 50x + 100y \leq 160000 \\ 150x + 100y \leq 240000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

$50x + 100y = 160000$

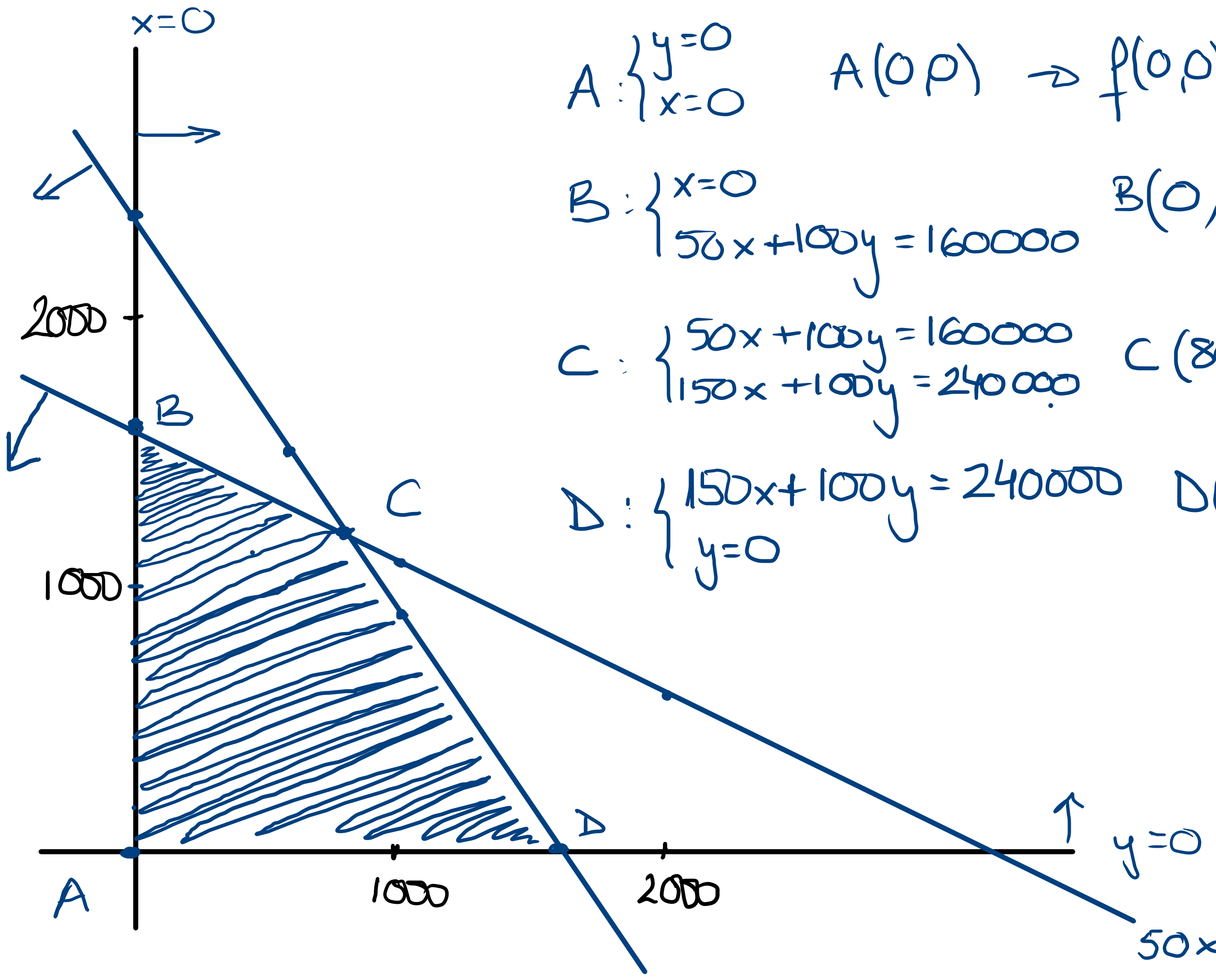
$x + 2y = 3200$

x	0	1000	2000
y	1600	1100	600

$150x + 100y = 240000$

$3x + 2y = 4800$

x	0	1000	600
y	2400	900	1500



$A: \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ $A(0,0) \rightarrow f(0,0)=0$

$B: \begin{cases} x=0 \\ 50x+100y=160000 \end{cases}$ $B(0,1600) \rightarrow f(0,0) = 1600$ €

$C: \begin{cases} 50x+100y=160000 \\ 150x+100y=240000 \end{cases}$ $C(800,1200) \rightarrow f(800,1200) = 2600$ €

$D: \begin{cases} 150x+100y=240000 \\ y=0 \end{cases}$ $D(1600,0) \rightarrow f(1600,0) = 2800$

4. Considera $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) Halla los valores de λ tales que $|A-\lambda I_3|=0$.

b) Para $\lambda=1$, resuelve el sistema dado por $(A-\lambda I_3)X=O$. ¿Existe alguna solución tal que z=1? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

a) $|A-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & -\lambda & 2\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2-2(1-\lambda)=0$

$\Rightarrow (1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-2] = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0 \begin{cases} 1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1 \\ \lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow |A-\lambda I_3|=0$ si $\lambda\in\{-1,1,2\}$.

b) $(A-\lambda I_3)X=O$ es un sistema homogéneo $\Rightarrow$ Compatible

Si $\lambda=1$, rango $(A-\lambda I_3)<3 \Rightarrow$ es un SCI.

El sistema es $\left.\begin{aligned} 2y+3z&=0\\ -y+2z&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=\alpha\\ y&=0\\ z&=0\end{aligned} \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{NO}}}$ existe solución $z=1$.

5. Considera el sistema de ecuaciones dado por AX=B, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ m & 4 & -2\\ 0 & m+2 & -3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}2\\ 2m\\ 1\end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Para $m=-2$, ¿existe alguna solución con z=0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ m & 4 & -2\\ 0 & m+2 & -3\end{pmatrix}$ $\quad A'=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ m & 4 & -2 & 2m\\ 0 & m+2 & -3 & 1\end{pmatrix}$

Por el T. de Rouche-Frobenius:

Si Rango (A) = Rango (A') = 3 => SCD

Si Rango (A) = Rango (A') < 3 => SCI

Si Rango (A) ≠ Rango (A') => SI

Estudiamos el rango de A:

$|A| = m^2-2m-8 = 0 \Rightarrow m \begin{cases} =4 \\ =-2 \end{cases}$

=> Si $m \neq \{-2,4\}$ => Rango (A) = 3 = Rango (A') => SCD.

Si $m=-2$: Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}4 & -2\\ 0 & -3\end{vmatrix} \neq 0$

$A'=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow{F_2=2F_1}$ Rango (A') = 2

=> SCI.

Si $m=4$: Rango (A) = 2

$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix} \neq 0$

$A'=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 4 & 4 & -2 & 8\\ 0 & 6 & -3 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & -2 & 8\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix} \neq 0$ => Rango (A') = 3

=> SI.

=> Si $m \neq \{-2,4\}$ => Rango (A) = Rango (A') = 3 = nº incógnitas => SCD

Si $m=2$ => Rango (A) = Rango (A') = 2 < nº de incógnitas => SCI

Si $m=4$ => Rango (A) ≠ Rango (A') => SI.

b) Para $m=-2$ el sistema es: $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ -3z=1 \end{cases}$

(la 2ª ecuación es proporcional a la 1ª, por tanto la podemos ignorar)

$z=\frac{-1}{3}$

=> No existe solución en la que $z=0$.