I.E.S. LAS AGUAS 29 de noviembre de 2010

Nombre y Apellidos: ……………………………………………………………………………………….

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices: $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$.

Solución:

Propiedad: Cambiar una línea por una combinación lineal (el determinante no varía)

$$C_1' = C_1 - 2C_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

Propiedad: Cambiar dos líneas paralelas (el determinante cambia de signo)

$$C_2 \Leftrightarrow C_3 \Leftrightarrow - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

2. Hallar el rango de la matriz M según los valores de a, b y c: $M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de estos parámetros la matriz M es regular (tiene inversa)?

Solución:

Comenzamos calculando el determinante de M por el método que queramos y comprobamos que es cero, independientemente de los valores de los parámetros a, b y c. con esto podemos afirmar que $\text{rango}(M) \neq 3$.

Ahora tenemos que ver si es posible que el rango de M sea 2. Estudiaremos para qué valores de los parámetros el rango de la matriz es 1 y para los demás valores, el rango será 2.

La única fila que conocemos es la primera, que tiene todos sus elementos iguales. Para que el rango de M sea 1 debe ocurrir que las otras dos filas tengan todos sus elemento iguales (así serían proporcionales a la primera) $\Rightarrow \begin{cases} a = b = c \\ b+c = c+a = a+b \end{cases}$ La segunda igualdad se simplifica en a=b=c.

Podemos decir, por tanto, que el rango de la matriz M será 1 si todos los parámetros toman el mismo valor, en caso contrario el rango de la matriz es 2.

Nombre y Apellidos: ……………………………………………………………………………………….

La matriz M no tiene inversa ya que $|M|=0$

3. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Resuelve la ecuación matricial *X·A-2B=C*.

Solución:

Tenemos que despejar la matriz *X*: *X·A=C+2B*

$$X\cdot A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la inversa de A:

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -13 & 1 \end{pmatrix}$ y multiplicamos por la derecha: $X=I_3\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -13 & 1 \end{pmatrix}$