Vectores en el espacio

Un **vector** es un segmento orientado. El vector $\overrightarrow{AB}$ es un vector de origen el punto A y extremo el punto B.

El **módulo** de un vector es la longitud del segmento. El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la distancia de A a B, se escribe $|\overrightarrow{AB}|$.

La **dirección** de un vector es la de la recta sobre la que está el vector y de todas las rectas paralelas. La dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta sobre la que están los puntos A y B.

Cada dirección tiene dos **sentidos** opuestos.

Dos **vectores son iguales** si tienen el mismo **módulo**, la misma **dirección** y el mismo **sentido**.

Analíticamente, escribiremos los vectores como un conjunto de tres números $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ (por estar en el espacio tridimensional).

Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** cuando alguno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás ($a\vec{v}+b\vec{u}+c\vec{w}+\dots$).

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Un conjunto de vectores es **linealmente independiente** si ninguno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás.

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Sistema de generadores:

Un conjunto de vectores de un espacio vectorial son generadoes de ese espacio si todo vector se puede poner como combinación lineal de los vectores del conjunto.

Base de un espacio vectorial:

Un conjunto de vectores de un espacio vectorial forman una base si:

- son linelamente independientes
- forman un sistema de generadores

Las coordenadas de un vector respecto a una base son los coeficientes de la combinación lineal de los vectores de la base:

$$\text{Base}=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} \rightarrow \text{Si} \quad \vec{t}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}+c\,\vec{w} \Rightarrow \vec{t_B}=(a,b,c)$$

Si los tres vectores de la base son perpendiculares entre sí, decimos que la base es **ortogonal**. Si los vectores de la base son ortogonales y unitarios, decimos que la base es **ortonormal**.

En el espacio euclídeo, la base ortonormal que usamos generalmente es $\{\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}\}$

Dimensión de un espacio vectorial:

Es el número de vectores de cualquiera de sus bases.

En el espacio tridimensional el mayor número de vectores linealmente independientes en un conjunto es 3. Cualquier base, por tanto, tendrá tres vectores.

Si tenemos un conjunto de 4 o más vectores, éstos serán linealmente dependientes.

De forma práctica podemos comprobar si un conjunto de vectores es linealmete independiente calculando el rango de la matriz formada al colocar los vectores como filas (o columnas). El rango de la matriz nos indicará el número de vectores linealmente independientes.

Puntos alineados: para comprobar si tres puntos (A, B y C) están alineados construimos dos vectores a partir de ellos ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) y calculamos el rango de la matriz cuyas filas son los dos vectores:

$$\begin{matrix} A(a_1,a_2,a_3) \\ B(b_1,b_2,b_3) \\ C(c_1,c_2,c_3) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \overrightarrow{AB}(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3) \\ \overrightarrow{AC}(c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{pmatrix}$$

Si el rango es 2, quiere decir que los vectores son linealmente independientes, por lo que los puntos no están alineados.

Si el rango es 1, quiere decir que los vectores son linealmente dependientes, por lo que los puntos están alineados.

Operaciones con vectores:

Producto de un vector por un escalar (número):

Si comparamos el nuevo vector $a \cdot \vec{v}$ con el vector $\vec{v}$:

- tiene la misma dirección
- Si a>0 tiene el mismo sentido y si a<0 tiene el sentido opuesto
- $|a \cdot \vec{v}| = |a| \cdot |\vec{v}|$

$a \cdot \vec{v} = (a \cdot v_1, a \cdot v_2, a \cdot v_3)$

Si $a = \frac{1}{|\vec{v}|}$, el módulo del nuevo vector será 1. Los vectores con módulo igual a la unidad se llaman **vectores unitarios**.

Propiedades:

(1) Asociativa respecto al producto de escalares: $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (ab) \cdot \vec{v}$

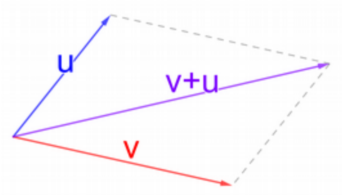
(2) Distributiva respecto a la suma de escalares: $(a+b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

(3) Distributiva respecto a la suma de vectores: $a \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{u}$

(4) Existencia de elemento unidad: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Suma de dos vectores:

Para sumar dos vectores gráficamente los colocaremos con el punto de aplicación en el mismo punto y completaremos el paralelogramo. El vector resultante será el que tiene el mismo punto de origen y va al vértice opuesto del paralelogramo.



Analíticamente, la suma se realizará sumando las coordenadas de los vectores: $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_{1,} u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

Para restar dos vectores se suma el primer vector con el opuesto del segundo vector: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Propiedades:

(1) Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(2) Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(3) Existencia de elemento neutro: $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$

(4) Existencia de elemento opuesto: $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

Producto escalar: $\vec{u}\cdot\vec{v}$

El producto escalar de dos vectores da como resultado un **número**.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$

Si $\vec{u}\neq 0$ y $\vec{v}\neq 0$: $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}}$

Aplicaciones del producto escalar:

(1) Módulo de un vector: $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

(2) Ángulo que forman dos vectores: $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

(3) Distancia entre dos puntos: $d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|$

Propiedades:

(1) Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

(2) Asociativa: $a\cdot(\vec{v}\cdot\vec{u})=(a\cdot\vec{v})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot(a\cdot vec u)$

(3) Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Producto vectorial: $\vec{u}\times\vec{v}$

El producto vectorial de dos vectores da como resultado un **vector** perpendicular a los dos vectores.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

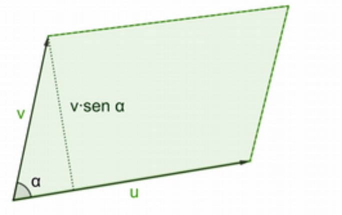
$\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u},\vec{v}$

$\vec{u}\|\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$

Expresión analítica: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$

Propiedades:

(1) El módulo de producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramos que delimitan.



(2) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

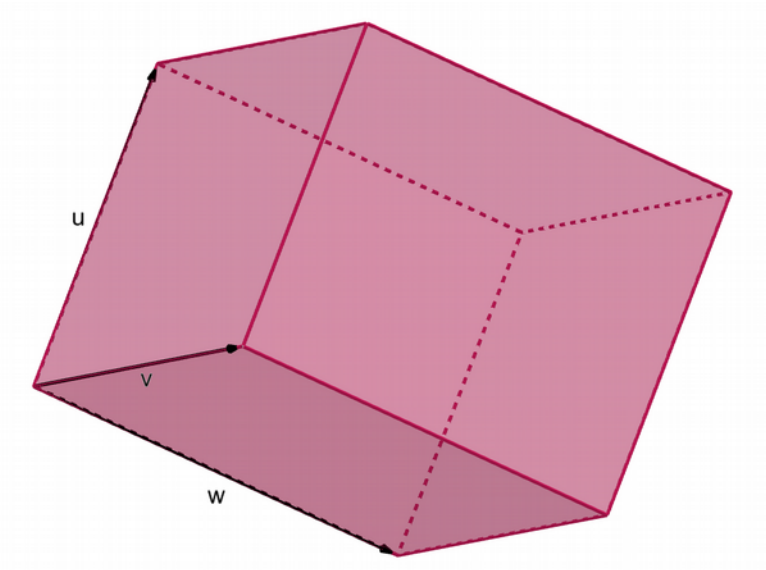
(3) $a\cdot(\vec{v}\times\vec{u})=(a\cdot\vec{v})\times\vec{u}=\vec{v}\times(a\cdot\vec{u})$

(4) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$ (5) $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$

Producto mixto: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

El producto mixto da como resultado un **número**. Es igual al volumen del paralelepípedo formado por esos tres vectores.

Expresión analítica: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$



Ecuaciones de la recta:

Una recta está determinada por un punto ($A(a_1,a_2,a_3)$) y una dirección ($\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$).

$X(x,y,z)$ es un punto genérico de la recta.

Ecuación vectorial de la recta: $\boxed{(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)}$

Ecuaciones paramétricas: $\boxed{\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \\ z=a_3+\lambda v_3 \end{cases}}$

Ecuación en forma continua: $\left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{x-a_1}{v_1} \\ \lambda=\dfrac{y-a_2}{v_2} \\ \lambda=\dfrac{z-a_3}{v_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}}$

Ecuación implícita: $\left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{x-a_1}{v_1} \\ \lambda=\dfrac{y-a_2}{v_2} \\ \lambda=\dfrac{z-a_3}{v_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2} \\ \dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{z-a_3}{v_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} v_2x-v_1y-a_1v_2+a_2v_1=0 \\ v_3x-v_1z-a_1v_3+a_3v_1=0 \end{array}\right\}}$

Un punto dado pertenece a una recta si al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la recta ésta se verifica.

Posiciones relativas de dos rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = b_1 + \alpha u_1 \\ y = b_2 + \alpha u_2 \\ z = b_3 + \alpha u_3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido al igualar las ecuaciones de las rectas:

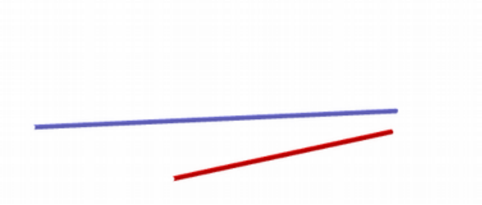
$$\Rightarrow \begin{array}{c} a_1 + \lambda v_1 = b_1 + \alpha u_1 \\ a_2 + \lambda v_2 = b_2 + \alpha u_2 \\ a_3 + \lambda v 3 = b_3 + \alpha u_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda v_1 - \alpha u_1 = b_1 - a_1 \\ \lambda v_2 - \alpha u_2 = b_2 - a_2 \\ \lambda v_3 - \alpha u_3 = b_3 - a_3 \end{array}$$

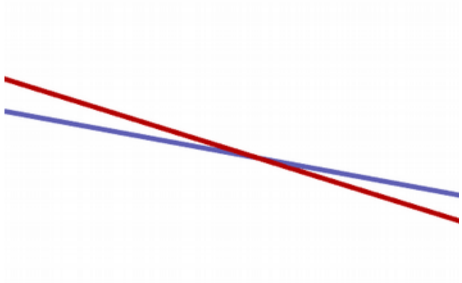
$$A = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \\ v_3 & u_3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & b_1 - a_1 \\ v_2 & u_2 & b_2 - a_2 \\ v_3 & u_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Si $\text{rango}(A)=2 \Rightarrow$ las rectas tienen la misma dirección

Si $\text{rango}(A')=3 \Rightarrow$ se cruzan

Si $\text{rango}(A')=2 \Rightarrow$ se cortan

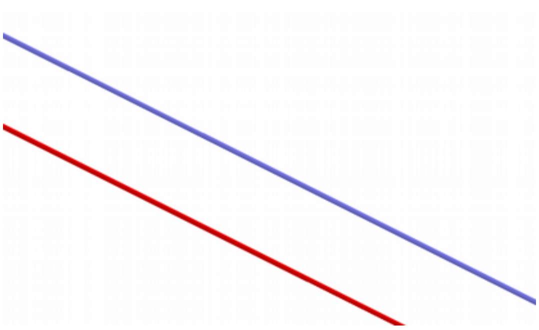


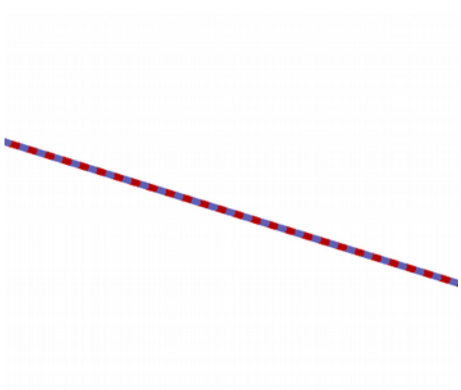


Si $\text{rango}(A)=1 \Rightarrow$ las rectas tienen la misma dirección

Si $\text{rango}(A')=2 \Rightarrow$ son paralelas

Si $\text{rango}(A')=1 \Rightarrow$ son coincidentes





Ecuaciones del plano:

Un plano está determinado por un punto (A) y dos direcciones ($\vec{v}$ y $\vec{u}$).

$X(x,y,z)$ es un punto genérico del plano.

Ecuación vectorial del plano: $\boxed{(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)+\mu(u_1,u_2,u_3)}$

Ecuaciones paramétricas del plano: $\boxed{\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1+\mu u_1 \\ y=a_2+\lambda v_2+\mu u_2 \\ z=a_3+\lambda v_3+\mu u_3 \end{cases}}$

Ecuación general del plano: $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \boxed{Ax+By+Cz+D=0}$

donde $A=\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}$; $B=-\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}$; $C=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$; $D=-(Aa_1+Ba_2+Ca_3)$

Un punto dado pertenece a un plano si al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación ésta se verifica.

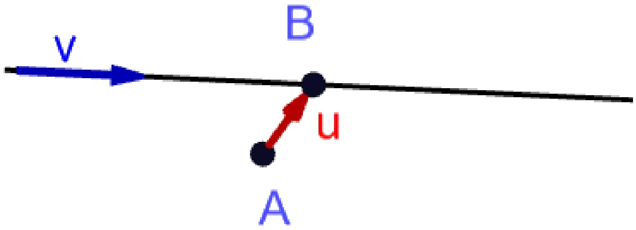
Obtención de la ecuación de un plano en diferentes casos:

Recordamos que un plano está determinado por un punto y dos direcciones.

Dados un punto (A) y una recta (r):

Punto: A

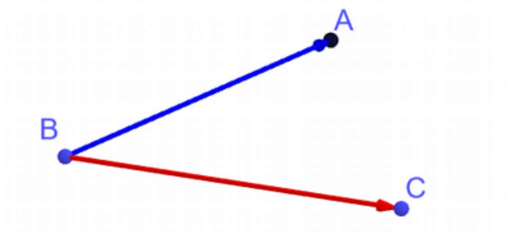
Direcciones: $\begin{cases} \text{la de la recta} \\ \overrightarrow{AB}, \text{ con } B\in r \end{cases}$



Dados tres puntos no alineados (A, B y C):

Punto: cualquiera de los tres.

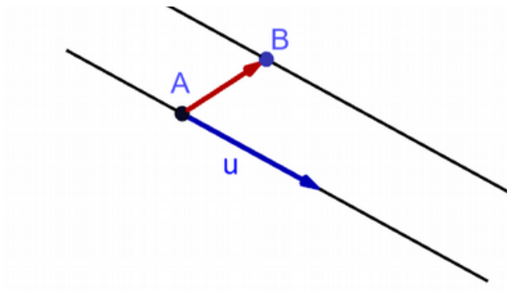
Direcciones: dos entre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$



Dadas dos rectas paralelas (r y s):

Punto: un punto de cualquiera de las dos rectas.

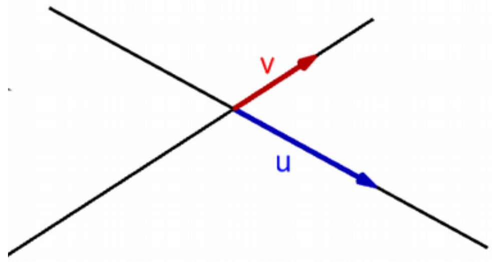
$$\text{Direcciones:} \begin{cases} \text{la de las rectas} \\ \overrightarrow{AB}, \text{ con } A \in r \text{ y } B \in s \end{cases}$$



Dadas dos rectas que se cortan (r y s):

Punto: un punto de cualquiera de las dos rectas.

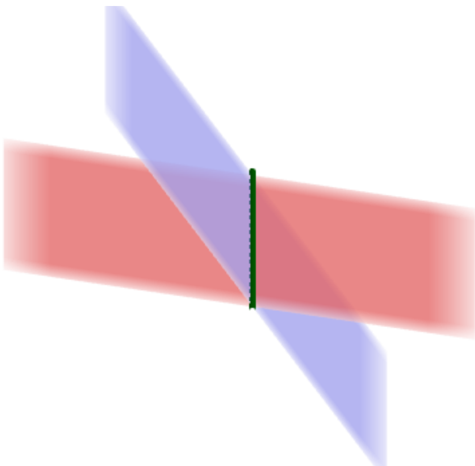
Direcciones: las de las rectas.



Posiciones relativas de dos planos:

$$\begin{matrix} \pi \equiv A\ x+B\ y+C\ z+D\ =0 \\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{matrix} \quad A=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

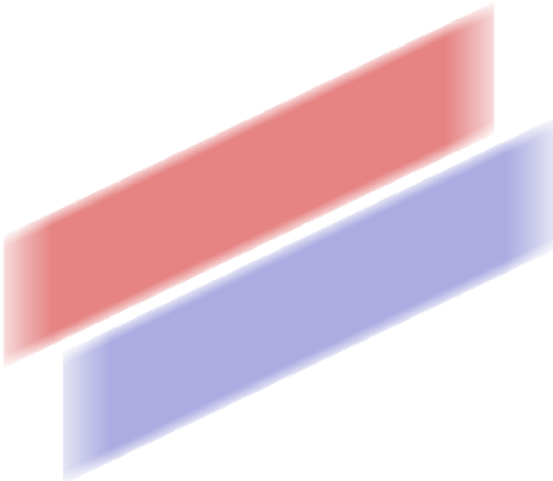
Si $\text{rango}(A)=\text{rango}(A')=2 \Rightarrow$ SCI $\Rightarrow$ se cortan según una recta.



Si $\text{rango}(A)=1$

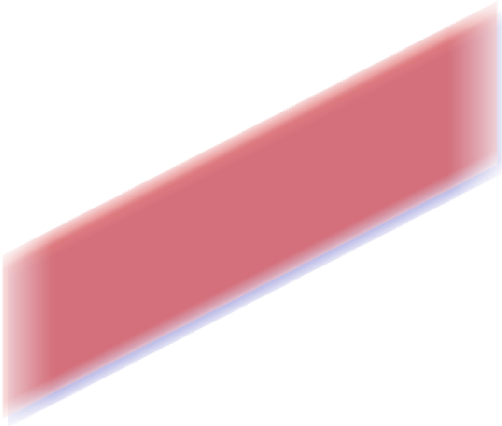
$\text{rango}(A')=2 \Rightarrow$ SI $\Rightarrow$ planos paralelos

$$\frac{A}{A}' = \frac{B}{B}' = \frac{C}{C}' \neq \frac{D}{D}'$$



$\text{rango}(A')=1 \Rightarrow$ SCI $\Rightarrow$ planos coincidentes

$$\frac{A}{A}' = \frac{B}{B}' = \frac{C}{C}' = \frac{D}{D}'$$



Haz de planos:

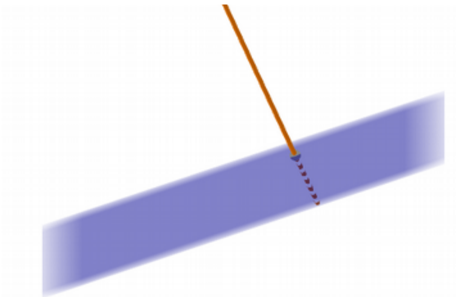
Son los infinitos planos que tienen en común una recta. Conocidos dos de ellos, podemos conocer los demás como combinación lineal:

$$\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')=0$$

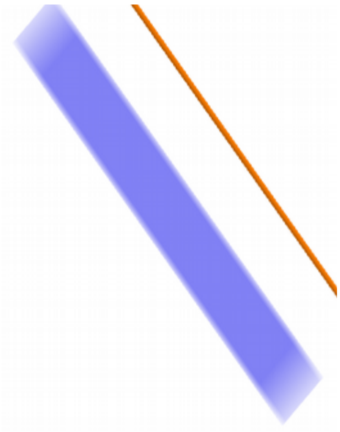
Posiciones relativas de una recta y un plano:

Hay que resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

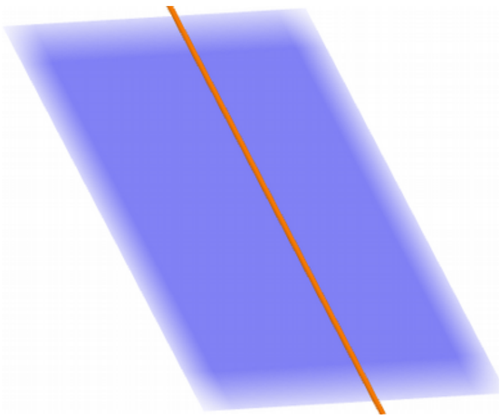
- La recta corta al plano en un punto (la solución es única)



- La recta es paralela al plano (no tiene solución)



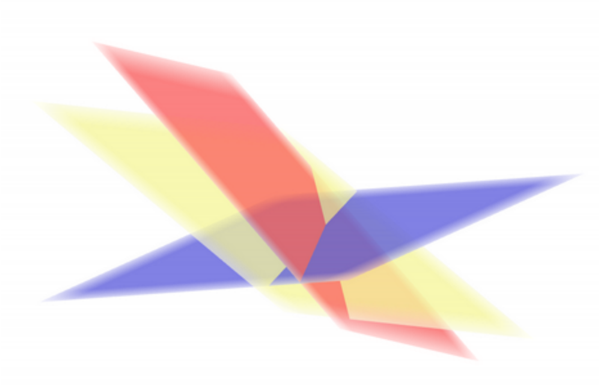
- La recta está contenida en el plano (tiene infinitas soluciones)



Posiciones relativas de tres planos:

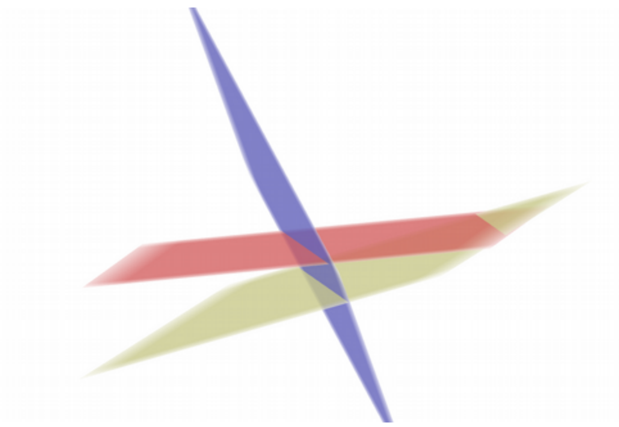
$$\begin{array}{l} \pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ \pi'' \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{array} \qquad A=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Si $\text{Rango}(A)=\text{Rango}(A')=3 \Rightarrow \text{SCD} \Rightarrow$ Se cortan en un punto



Si $\text{Rango}(A)=2$ y $\text{Rango}(A')=3 \Rightarrow \text{SI}:$ Se cortan según rectas paralelas.

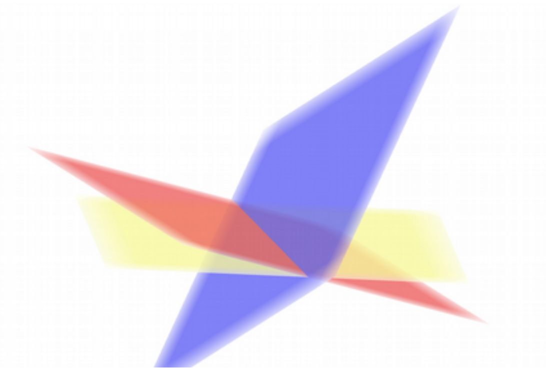
Si todos los menores de orden 2 de la matriz A son no nulos, los planos se cortan 2 a 2 según **tres rectas paralelas**.



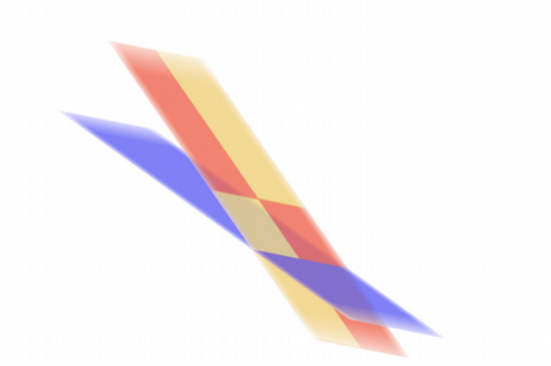
Si algno de los menores de orden 2 de la matriz A es nulo, dos planos son paralelos y el tercero los corta **según dos rectas paralelas**.

Si $\text{Rango}(A)=\text{Rango}(A')=2 \Rightarrow \text{SCI} \Rightarrow$ Se cortan según **una recta**.

Si todos los menores de orden 2 de la matriz A' son no nulos, los **tres planos son distintos**.

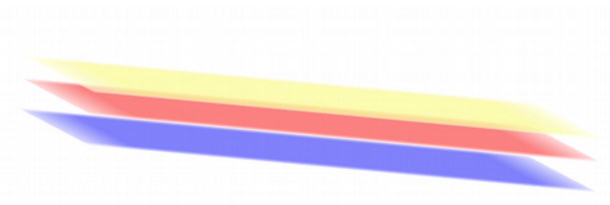


Si algún menor de orden 2 de la matriz A' es nulo, **dos planos coinciden** y el otro plano los corta según una recta.

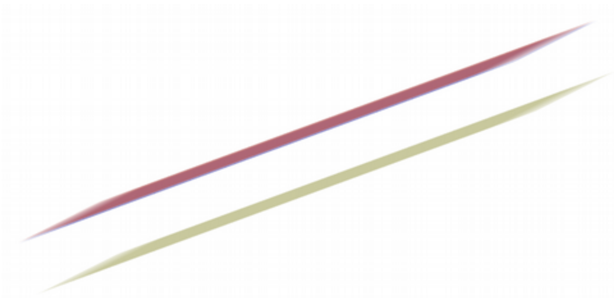


Si $\text{Rango}(A)=1$ y $\text{Rango}(A')=2 \Rightarrow \text{SI} \Rightarrow$ Los tres planos no tienen **nada en común**.

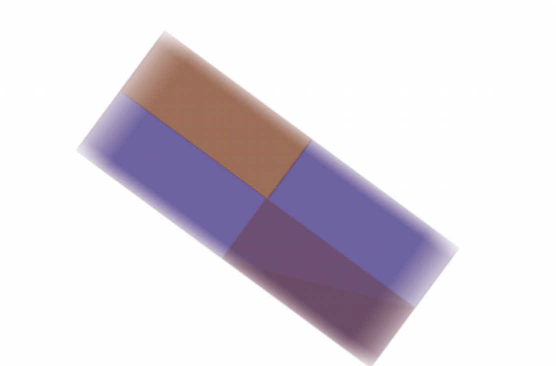
Si todos los menores de orden 2 de la matriz A' son no nulos, los tres planos son distintos.



Si algún menor de orden 2 de la matriz A' es nulo, **dos planos coinciden** y el otro plano es paralelo.



Si $\text{Rango}(A)=\text{Rango}(A')=1 \Rightarrow \text{SCI}$: Los tres planos son **coincidentes**.



Cálculo de distancias:

Distancia entre dos puntos:

$d(A,B)=|\overline{AB}|$

Distancia entre un punto y una recta: $P;r$

I. Obtenemos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto → Hallamos el punto de corte entre la recta y el plano (Q)→ Calculamos la distancia entre el punto obtenido y el punto dado: **d(Q,P)**

II. Tomamos un punto genérico de la recta: R → $\overrightarrow{PR}\perp r\Rightarrow\overrightarrow{PR}\cdot\vec{v}_r=0\Rightarrow$ obtenemos P' → Calculamos la distancia **d(P,P')**

III. $\mathbf{d(P,r)}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathbf{RP}}\times\vec{\mathbf{v}}_r|}{|\vec{\mathbf{v}}_r|}$ (Área de la base del paralelogramo formado por $\overrightarrow{RP}$ y $\vec{v}_r$ dividido entre la longitud de la base)

Distancia de un punto a un plano: π,P

I. Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por P (r) → Hallamos el punto intersección entre la recta y el plano (P') → Calculamos la distancia **d(P,P')**.

II. $\mathbf{d(P,\pi)}=\dfrac{|\mathbf{Ax_0+By_0+Cz_0+D}|}{\sqrt{\mathbf{A^2+B^2+C^2}}}$

Distancia de recta a plano: r,π

Si $\vec{v}_r\pm\vec{n}\Rightarrow\pi$ y r se cortan $\Rightarrow d(\pi,r)=0$

Si $\vec{v}_r\perp\vec{n}\Rightarrow\pi\parallel r\Rightarrow\begin{cases}d(\pi,r)=d(\pi,P)\ ;P\in r\\ r\in\pi\Rightarrow d(\pi,r)=0\end{cases}$

Distancia de plano a plano: π,π'

Si $\vec{n}\nparallel\vec{n}'\Rightarrow\pi$ y π' se cortan $\Rightarrow d(\pi,\pi')=0$

Si $\vec{n}\parallel\vec{n}'\Rightarrow d(\pi,\pi')=d(\pi,P');\ P'\in\pi'$

Distancia entre dos rectas: r,s

Si $\vec{v}_r\parallel\vec{v}_s\Rightarrow d(r,s)=d(r,S);\ S\in s$

Si $\vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$:

I. Hallamos $\pi \| s;\ r \in \pi \ \rightarrow \ \mathbf{d(r,s)=d(\pi,s)}$

II. $R \in r;\ S \in s \Rightarrow \overrightarrow{RS} \perp r, s \ \Rightarrow \ \mathbf{d(r,s)=d(R,S)}$

III. $\mathbf{d(r,s)} = \dfrac{[\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}}, \overrightarrow{\mathbf{RS}}]}{|\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}}|}$ (Volumen del paralelepípedo dividido entre el área de la base)