1. Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula: $A^2-4A+4I_3$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Una fábrica de muebles hace mesas (M), sillas (S), y armarios (A), y cada uno de ellos en tres modelos: económico (E), normal (N) y lujo (L). Cada mes produce de mesas, 50 E, 40 N y 30 L; de sillas, 200 E, 150 N y 100 L; de armarios, 40 E, 30 N y 20 L.

a) Representa esta información en una matriz. $\begin{array}{c} \\ M \\ S \\ A \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} E & N & L \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$

b) Calcula la matriz que da la producción de un año.

$$12\cdot\begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 600 & 480 & 360 \\ 2400 & 1800 & 1200 \\ 480 & 360 & 240 \end{pmatrix}$$

3. Una fábrica produce dos modelos de acumuladores de calor, G y P, en tres terminaciones: normal, lujo y especial. Del modelo G, produce 500 unidades normales, 300 unidades de lujo y 200 especiales. Del modelo P, produce 400 unidades normales, 200 unidades de lujo y 100 especiales. La terminación normal necesita 20 horas de fabricación de piezas y 1,5 horas de montaje. La terminación de lujo necesita 25 horas de fabricación y 2 horas de montaje, y la terminación especial necesita 30 horas de fabricación y 2,5 horas de montaje.

a) Representa en dos matrices la información dada.

$$\text{producción}\rightarrow P=\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 400 & 200 & 100 \end{pmatrix} \qquad \text{horas}\rightarrow H=\begin{pmatrix} 20 & 1{,}5 \\ 25 & 2 \\ 30 & 2{,}5 \end{pmatrix}$$

b) Escribe una matriz que exprese las horas de fabricación y de montaje empleadas para cada uno de los modelos. $P\cdot H=\begin{pmatrix} 23500 & 1850 \\ 16000 & 1250 \end{pmatrix}$

c) Si cada hora de fabricación se paga a 15 € y cada hora de montaje a 18 €, escribe una matriz que exprese el coste total de los acumuladores G y P

$$\begin{pmatrix} 23500 & 1850 \\ 16000 & 1250 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 385800 \\ 262500 \end{pmatrix}$$

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula el siguiente determinanate aplicando las propiedades: $\begin{vmatrix} a+2b & b & c \\ d+2e & e & f \\ g+2h & h & i \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a+2b & b & c \\ d+2e & e & f \\ g+2h & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b & c \\ 2e & e & f \\ 2h & h & i \end{vmatrix} = 2+0=\mathbf{2}$$

Descomponemos el determinante en la suma de dos determinanates que tienen las columnas 2 y 3 iguales y las primeras columnas suman lo que el determinante inicial.

El primer determianante es igual al que nos da el ejercicio y el segundo determianante tiene dos columnas proporcionales, por eso es cero.

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow |A\cdot B|=165$$

$$|A|=-33; \quad |B|=-5 \rightarrow |A|\cdot|B|=165$$

6. Determina la matriz X tal que $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$X=\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$$

7. Calcula el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Las columnas 1 y 4 son linealmente independientes y no dependen de ningún parámetro. Esto nos asegura que el rango de esta matriz es, al menos 2.

Intercambiamos las columnas 2 y 4, de forma que obtenemos otra matriz con el

mismo rango: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & a & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -4 & a+4 \end{pmatrix}$

Hacemos ceros en la primera columna ($2\cdot F_2 + F_1$ y $2F_3 - 5F_1$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & a & 0 \\ 0 & 8 & a-2 & 0 \\ 0 & -16 & -8-5a & 2a+8 \end{pmatrix}$$

Hacemos cero en la segunda columna ($F_3 + 2F_2$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & a & 0 \\ 0 & 8 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & -12-3a & 2a+8 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz será 3 sólo si la última fila no tiene todos sus elementos nulos. Si **a=-4**, entonces -12-3a=0 y 2a+8=0 y la matriz tendrá rango 2. en caso contrario tendrá rango 3.

8. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 6a+2b \\ 3c & 6c+2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a+2b \\ d & 6c+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a \\ d & 6c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 6\cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} - 0 = 6\cdot 5 - 6\cdot(-5) = 60$$

9. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación $A^2 + AX = I_2$.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$