

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B . Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A . Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.

Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio total sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Baterías A (x)

Baterías B (y)

$$x + y \geq 10$$

$$y - x \leq 10$$

$$150x + 100y \leq 6000$$

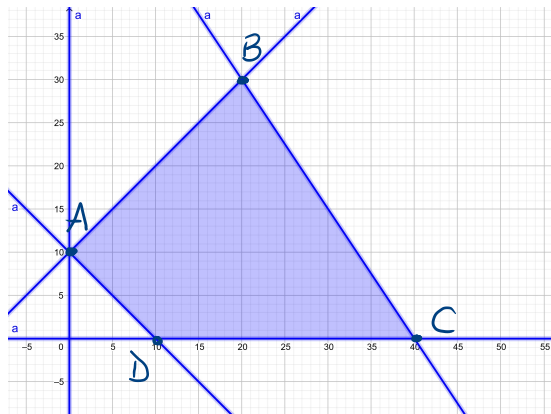
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Beneficio: $f(x, y) = 130x + 140y$

↳ Máximo

Representamos la región factible:



Vértices:

$$A: \begin{cases} x + y = 10 \\ y - x = 10 \end{cases} \rightarrow A(0, 10)$$

$$B: \begin{cases} y - x = 0 \\ 150x + 100y = 6000 \end{cases} \rightarrow B(20, 30)$$

$$C: \begin{cases} 150x + 100y = 6000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow C(40, 0)$$

$$D: \begin{cases} x + y = 10 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D(10, 0)$$

Evaluamos la función objetivo en los

vértices:

$$f(0, 10) = 1400$$

$$f(20, 30) = 6800 \rightarrow \text{Para que el beneficio sea máximo hay que producir 20 baterías de tipo A y 30 baterías de tipo B.}$$

$$f(40, 0) = 5200$$

$$f(10, 0) = 1300$$

El beneficio máximo es de 6800 €.

EJERCICIO 2

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) (0.7 puntos) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A ?

b) (1.8 puntos) Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$.

$$a) \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = 2 + 3m - 2m^2 + 3 = -2m^2 + 3m + 5$$

$$\text{Resolvemos la ecuación de 2º grado: } m = \begin{cases} -1 \\ \frac{5}{2} \end{cases}$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq \frac{5}{2}$, existe la matriz inversa de A .

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X \cdot A - A^2 = I_3 \Rightarrow X = (I_3 + A^2) \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -6 & 1 & -9 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ -2 & 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

- a) (1 punto) Estudie su monotonía y calcule sus extremos.
 b) (0.5 puntos) Represente gráficamente la función.
 c) (0.5 puntos) Calcule $\int f(x)dx$.
 d) (0.5 puntos) Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

$$a) \quad f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \left\{ \frac{2}{3}, 2 \right\}$$

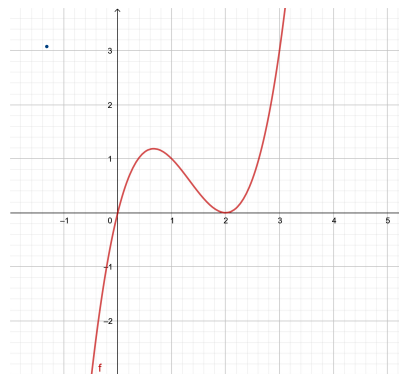
$$\begin{array}{c} \frac{2}{3} \qquad \qquad 2 \\ \hline \text{signo } f'(x) \quad > 0 \qquad < 0 \qquad > 0 \end{array}$$

$\Rightarrow f(x)$ es creciente $\forall x \in (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$
 $f(x)$ es decreciente $\forall x \in (\frac{2}{3}, 2)$

Tiene un máximo en $x = \frac{2}{3} : (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$

Tiene un mínimo en $x = 2 : (2, 0)$

b)



$$c) \quad \int (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$$

$$d) \quad \text{Cortes con el eje X: } y=0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} u^2$$

EJERCICIO 4

a) (1 punto) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$g(x) = x^3 \cdot e^{2x^2}$$

b) (0.7 puntos) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) (0.8 puntos) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

$$a) f'(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$g'(x) = 3x^2 e^{2x^2} + x^3 \cdot 4x e^{2x^2}$$

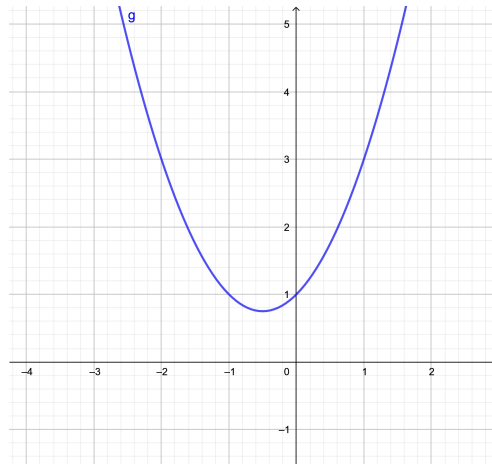
$$b) \text{ Vértice: } x_v = -\frac{1}{2} ; h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Cortes con los ejes:

$$\text{Eje } y: x=0 \Rightarrow h(0)=1$$

$$\text{Eje } x: y=0 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \text{No tiene}$$

$$c) \int_{-\frac{1}{2}}^0 h(x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{5}{12} \text{ u}^2$$



EJERCICIO 5

BLOQUE C

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B , contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna A , 1500 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90% de los vacunados con la A y el 95% de los vacunados con la B , generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) (1 punto) Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

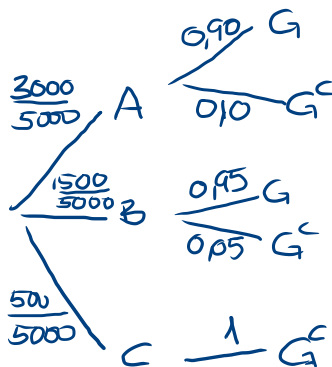
Definimos los sucesos:

A : recibe vacuna A

B : recibe vacuna B

C : recibe placebo

G : genera anticuerpos



$$a) P(G) = P(A) \cdot P(G|A) + P(B) \cdot P(G|B) = \frac{3}{5} \cdot 0,90 + \frac{3}{10} \cdot 0,95 = \underline{\underline{0,825}}$$

$$b) P(C|G^c) = \frac{P(C \cap G^c)}{P(G^c)} = \frac{0,1}{0,175} = \underline{\underline{0,571}}$$

$$P(G^c) = 1 - P(G) = 0,175$$

$$P(C \cap G^c) = \frac{1}{10} = 0,1$$

EJERCICIO 6

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar.

- a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.
- b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.
- c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

E : producto electrónico

I : a través de Internet

$$P(E) = 0,55$$

$$P(I) = 0,72$$

$$P(E|I) = 0,64$$

$$a) P(E \cap I) = P(I) \cdot P(E|I) = 0,72 \cdot 0,64 = \underline{\underline{0,4608}}$$

$$b) P(E \cup I) = P(E) + P(I) - P(E \cap I) = \underline{\underline{0,8092}}$$

$$c) P(I^c | E^c) = \frac{P(I^c \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{P((I \cup E)^c)}{1 - P(E)} = \frac{1 - P(I \cup E)}{1 - P(E)} = \underline{\underline{0,424}}$$

$$I^c \cap E^c = (I \cup E)^c \quad (\text{Leyes de Morgan})$$

EJERCICIO 7

a) (1.5 puntos) En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 de Ingeniería Informática, 30 de Ingeniería Civil, 50 de Ingeniería Mecánica y 20 de Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20% de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1. ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?
2. ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) (1 punto) Dada la población $\{a, 10, 12, 11, 18\}$, ¿cuánto debe valer a , sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 13.2?

	Estudiantes
a) I. Eléctrica	60
I. Inform.	40
I. Civil	30
I. Mecánica	20
	150

20% de 150 = 30 encuestas

1. Muestreo aleatorio estratificado con asignación proporcional

2. 20% de 150 = 30 → tamaño de la muestra

20% de 60 = 12 alumnos de I. Elec.

20% de 40 = 8 alumnos de I. Inf.

20% de 30 = 6 alumnos de I. Civil

20% de 20 = 4 alumnos de I. Mec.

$$b) \{a, 10, 12, 11, 18\}$$

$$\bar{X} = \mu \Rightarrow \frac{a + 10 + 12 + 11 + 18}{5} = 13,2$$

$$\Rightarrow a = \underline{\underline{15}}$$

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

$$n = 100$$

$$p = \frac{45}{100} = 0,45 \Rightarrow q = 0,55$$

$$a) 1 - \alpha = 0,92$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0,92}{2} = 0,96$$

$$z_{\alpha/2} = 1,755$$

$$IC(p) = \left(0,45 - 1,755 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{100}} ; 0,45 + 1,755 \cdot \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{100}} \right) = \underline{\underline{(0,3627 ; 0,5373)}}$$

$$b) E \leq 0,05$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{1,755}{0,05} \right)^2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 304,9$$

$$\Rightarrow \text{Tamaño mínimo : } \underline{\underline{305 \text{ personas}}}$$