1. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3+x^2}-x & ; \ 0<x\le 1\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{4} & ; \ x>1\end{cases}$$

Ambos "trozos" son continuos y derivables en sus respectivos intervalos.

Continuidad en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}$$ no es continua en $x=1$. $\Rightarrow$ NO ES DERIVABLE EN $x=1$.

Función derivada: $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}-1 & ; \ 0<x<1\\ -\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{2} & ; \ x>1\end{cases}$$

2. $f(x)=x^3+3x^2+cx+d$

Punto de inflexión $\to$ recta tg $\Rightarrow y=3x+4$

Buscamos el punto de inflexión: $f''(x)=0$

$f'(x)=3x^2+6x+c$

$f''(x)=6x+6 \longrightarrow 6x+6=0 \Rightarrow x_0=-1$

$y_0=-1+3-c+d=2-c+d$

En (x_0,y_0), la derivada es 3 (= pendiente de la recta tg.: $y=3x+4$)

$f'(-1)=3-6+c=3 \Rightarrow \underline{\underline{c=6}}$

Recta tangente: $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ $\longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 - c + d = -4 + d \\ f'(x_0) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y + 4 - d = 3\cdot(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 1 + d \\ y = 3x + 4 \end{array}\right\} \underline{\underline{d = 5}}$$

la recta tg que me dice el enunciado.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + \underset{c}{\underline{6}}x + \underset{d}{\underline{5}}$$

3. $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$

a) Asintotas:

Verticales $\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \underline{\underline{x = -1}} \text{ es asintota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \dfrac{33}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \dfrac{33}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \underline{\underline{x = 3}} \text{ es asintota vertical.}$$

Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \underline{\text{No}} \text{ tiene asintotas horizontales.}$$

Oblícuas:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x}{x^3-2x^2-3x} = 1 = m$$ → pendiente de la asintota oblíc.

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x-(x^3-2x^2-3x)}{x^2-2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x}{x^2-2x-3} = 2$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{y = x+2}}$ es asintota oblícua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m \\ n = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right) = 2 \end{array}\right\} \underline{\underline{y = x+2}}$$

b) Las asintotas verticales no puede cortarlas ya que son puntos en los que no existe la función (por anularse el denominador).

Corte con la asintota oblícua:

$$\frac{x^3+2x}{x^2-2x-3} = x+2 \Rightarrow x^3+2x = (x+2)(x^2-2x-3)$$

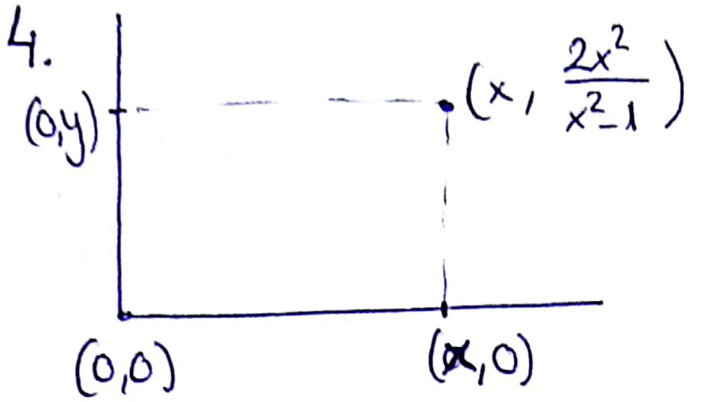
$$x^3+2x = x^3-7x-6 \Rightarrow 9x = 6$$

$$\underline{x = 2/3}$$

$$y = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

La función corta a la asintota oblícua en el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$

4.



$$\text{Área}: x \cdot y = x \cdot \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2x^3}{x^2-1} \to \text{mínima}.$$

$$A'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{+2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow +2x^2(x^2-3) = 0 \begin{cases} +2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \underline{\underline{+3}};\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Área mínima:

$$\text{base} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

$$\text{altura} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$$