Prueba 6

① $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) $X-Y=A^t$

$2X-Y=B$

$X = B-A^t = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$Y = X-A^t = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

b) $AZ = BZ + A$

$(A-B)Z = A$

$Z = (A-B)^{-1}\cdot A$

$A-B = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; $|A-B| = 1$

$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$Z = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

② $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ -1 & m & m-2\\ m & 0 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Rango (A)

$|A| = 4m^2-6m+2$; $|A|=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{1}{2}\end{cases}$

Si $m\neq 1$ y $m\neq\frac{1}{2} \Rightarrow \text{ran}(A)=3$

Si $m=1$

$\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A)=2$

Si $m=\frac{1}{2}$

$\begin{vmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A)=2$

b) Si $m \neq 1$ y $m \neq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \Rightarrow$ S.C.D. (A' es la matriz ampliada)

$m=1$:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Las columnas 2ª y 4ª son iguales. $\Rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$

S.C.I.

$m = \frac{1}{2}$:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{ran}(A) = 2 \\ \text{ran}(A') = 3 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

c) $$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} -x + y - z = 1 \\ x \quad + 2z = 0 \end{matrix} \right.$$

$$\boxed{z = \lambda \Rightarrow \begin{matrix} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{matrix}}$$

3

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & m & 2 & m+1 \\ -3 & 6 & -3m & -9 \end{pmatrix}$$

a)

$|A| = -6m(m-3) \rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} m = 0 \\ m = 3 \end{matrix} \right.$

$m \neq 0$ y $m \neq 3$ $\Rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = $ nº incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

$m=0$: $$A' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -9 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{ran}(A') = 3 \\ \text{ran}(A) = 2 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \text{S.I.}$$

$m=3$: $$A' = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Las filas 1ª y 3ª son proporcionales

$\Rightarrow \text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A) <$ nº incógnitas

$\Rightarrow$ S.C.I.

b) $m=3$: $\left.\begin{array}{l} 2x-4y+6z=6 \\ 3y+2z=4 \end{array}\right\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y=\lambda \Rightarrow z=\dfrac{4-3\lambda}{2} \\ \qquad x=\dfrac{13\lambda-6}{2} \end{array}}$$

$$y=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=-3 \\ y=0 \\ z=2 \end{array}}$$

4) Libro : x

Calculadora : y

Estuche : z

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\} \rightarrow y+z=\frac{1}{2}x$$

a) Sustituyendo en la primera ecuación: $x+\frac{1}{2}x=57$

$$\Rightarrow x=\frac{57\cdot 2}{3}=38\,€$$

El libro cuesta 38 €.

Sabemos que la calculadora y el estuche juntos cuestan $\frac{38}{2}=19\,€$, pero no disponemos de más datos.

Sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas $\Rightarrow$ no es S.C.D.

$\Rightarrow$ no podemos determinar con exactitud la solución.

b) $$\left.\begin{array}{l} 50\%\cdot x+80\%\cdot y+75\%\cdot z=34 \\ x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 10x+16y+15z=680 \\ x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

$$x=2(y+z) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10\cdot 2(y+z)+16y+15z=680 \\ 2(y+z)+y+z=57 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 36y+35z=680 \\ 3y+3z=57 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 36y+35z=680 \\ -36y-36z=684 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{\underline{z=4}};\ \underline{\underline{y=15}}$$

Libro: 38€

Calculadora: 15 €

Estuche: 4€.

5) a) $\left.\begin{array}{l} x+y+5z=0 \\ 2x-kz=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$; $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A|=-2k-12=0 \Rightarrow k=-6$

Si $k\neq -6 \Rightarrow$ ran$(A)=3=$ nº de incógnitas.

Al ser un sistema homogéneo, la única solución es la trivial: $x=y=z=0$.

Si $k=-6 \Rightarrow$ ran$(A)=2 \Rightarrow$ S.C.I.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$

$\boxed{z=\lambda \Rightarrow x=-3\lambda,\ y=-2\lambda}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y+5z=0 \\ 2x-3z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+2\lambda z=\lambda \end{array}\right\}$ $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$; $|A'|=\lambda\cdot(-18)$

Si $\lambda=0 \Rightarrow$ Sist. homogéneo con ran$(A)=3=$ nº incógnitas

$\Rightarrow$ sólo tiene solución trivial.

Si $\lambda\neq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{ran}(A)=3 \\ \text{ran}(A')=4\end{array}\right\} \Rightarrow$ Sist. incompatible.