Nombre y apellidos:
Fecha:

1. (2.5 puntos) Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x)+b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x)+b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3}=\frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital ($\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$) para resolver la indeterminación:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-x\,\mathrm{sen}(x)+b\cos(x)}{3x^2}=\frac{1+b}{0}$$

Como sabemos que el límite es finito $\Rightarrow 1+b=0 \Rightarrow \mathbf{b=-1}$.

Sustituímos el valor de b y continuamos calculando el valor del límite. Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to a} \frac{-\mathrm{sen}(x)-x\cos(x)}{6x}=\frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \to a} \frac{-\cos(x)-\cos(x)+x\,\mathrm{sen}(x)}{6}=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}$$

2. (1.5 puntos) Sea $f:(-\infty,1)\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$

   Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

Ambos trozos son continuos y derivables, por lo que estudiamos la función en x=0.

Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sea continua en dicho punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x)=2=f(0) \\ \lim_{x \to 0^+} f(x)=a\sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow 2=a\sqrt{b}$$

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{-a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad 0<x01 \end{cases}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f'(x)=-1 \\ \lim_{x \to 0^+} f'(x)=\frac{-a}{2\sqrt{b}} \end{array}\right\} \Rightarrow -1=\frac{-a}{2\sqrt{b}}$

Resolvemos $\begin{cases} 2=a\sqrt{b} \\ -1=\frac{-a}{2\sqrt{b}} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{b=1;a=2}$

3. (1 punto) Sea la función definida por $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$ para $x\ge -1$, $x\ne 0$.

   Calcula los límites laterales de f en x=0.

$$\lim_{x \to 0^-} x\,e^{\frac{1}{x}}=0\cdot e^{-\infty}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot \infty$ Lo convertimos en cociente y aplicamos la regla de L'Hôpital para

resolver la inderterminación: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

4. (2.5 puntos) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a\,\mathrm{sen}(x) - x e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el del límite.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a\,\mathrm{sen}(x) - x e^x}{x^2} = \frac{0}{0}$ Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a\cos(x) - e^x - x e^x}{2x} = \frac{a-1}{0}$ Como sabemos que el límite es finito, debe ser **a =1**.

Sustituímos el valor de a y volvemos a aplicar la regla de l'Hôpital para calcular el límite:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\mathrm{sen}(x) - e^x - e^x - x e^x}{2} = \frac{-2}{2} = \mathbf{-1}$

5. (2.5 puntos) Se considera la función derivable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2} & \text{si} \quad x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b.

Para que una función sea derivable es necesario que sea continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 - a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a + b = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - a = a + b$$

Calculamos la derivada y estudiamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(x-2)}^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{-b}{2\sqrt{x^3}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{-b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -a = \frac{-b}{2}$$

Resolvemos $\begin{cases} 1 - a = a + b \\ a = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{b = \frac{1}{2}; a = \frac{1}{4}}$