Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de expresiones de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+a_{p3}x_n+\ldots+a_{pn}x_n=b_p \end{array}\right\}$$

Sistema de **p** ecuaciones con **n** incógnitas.

$a_{ij}\in\mathbb{R}$: coeficientes

$b_i\in\mathbb{R}$: términos independientes

x_j : incógnitas

Representación del sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de los coeficientes: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ Se le añade a la matriz de los coeficientes la columna correspondiente a los términos independientes.

Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución cuando existen **n** números que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Sistemas **incompatibles** (S.I.): sistema que carece de solución.

Sistemas **compatibles** (S.C.): todo sistema que tiene solución.

Sistemas **compatibles determinados** (S.C.D.): tienen una única solución.

Sistemas **compatibles indeterminados** (S.C.I.): tienen infinitas soluciones.

Teorema de Rouche-Frobenius:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas tenga solución es que el **rango de la matriz de los coeficientes** sea igual al **rango de la matriz ampliada**.

Será un sistema compatible **determinado** si, además, el **rango** de las matrices de los coeficientes y ampliada es **igual** al **número de incógnitas**.

Será un sistema compatible **indeterminado** si el rango es **menor** que el **número de incógnitas**.

$$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A') \Rightarrow \text{S.I.}$$

$$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') \Rightarrow \text{S.C.} \rightarrow \begin{cases} \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = n \Rightarrow \text{S.C.D.} \\ \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') < n \Rightarrow \text{S.C.I.} \end{cases}$$

Sistemas de Cramer

Un sistema es de Cramer cuando:

1. El número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas.
2. La matriz de los coeficientes es **regular** (tiene inversa).

Todo sistema de Cramer es **compatible determinado**:

$$\left.\begin{array}{r} AX = B \\ \exists A^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Cada incógnita (x_i) se puede calcular como el cociente entre el determinante obtenido de sustituir en la matriz de los coeficientes la columna correspondiente a esa incógnita (columna i-ésima) por la columna de los términos independientes, y el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Sistemas homogéneos

Un sistema homogéneo es aquel que en el que sus términos independientes son todos nulos.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_n + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Todos estos sistemas admiten la **solución trivial** ($x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ \ldots;\ x_n = 0$)

Si la única solución que admiten es la trivial, el sistema es **incompatible**.

Si admite más soluciones, además de la trivial, será un sistema **compatible indeterminado**.