Prueba 7.

1) $\pi \equiv 2x+2y+z+7=0$

$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$

$A(1,5,-4)$

a) $B \in r$ tq $\vec{AB} \parallel \pi \ (\Rightarrow \vec{AB} \perp \underbrace{\vec{n} = (2,2,1)}_{\text{vector ortogonal al plano } \pi})$

$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow B(1+\lambda, 2+2\lambda, 1+3\lambda)$ es un punto de la recta r.

$\vec{AB}(\lambda, 2\lambda-3, 3\lambda+5) \perp \vec{n}(2,2,1) \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{n} = 0$

$\vec{AB}\cdot\vec{n} = 2\lambda + 2(2\lambda-3) + 3\lambda+5 = 0$

$2\lambda+4\lambda-6+3\lambda+5 = 0 \rightarrow 9\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$

$\boxed{B\left(\frac{10}{9}, \frac{20}{9}, \frac{4}{3}\right)}$

b) $C \in r$ tq $\vec{AC} \perp \pi \ (\Rightarrow \vec{AC} \parallel \vec{n} = (2,2,1))$

$C(1+\lambda, 2+2\lambda, 1+3\lambda)$

$\vec{AC}(\lambda, 2\lambda-3, 3\lambda+5) \parallel \vec{n}(2,2,1) \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{2\lambda-3}{2} = \frac{3\lambda+5}{1}$

$\frac{\lambda}{2} = \frac{2\lambda-3}{2} \Rightarrow \lambda = 2\lambda-3 \Rightarrow \lambda = 3$

$\frac{2\lambda-3}{2} = \frac{3\lambda+5}{1} \Rightarrow 2\lambda-3 = 6\lambda+10 \Rightarrow 4\lambda = -13 \Rightarrow \lambda = \frac{-13}{4}$

} Son diferentes

$\Rightarrow \nexists\, C$ con las características pedidas

(2) $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

a) $\pi_1 \perp r \longrightarrow \vec{v}(3,2,-1)$: vector director de r.

$P(1,2,3) \in \pi_1$

Es $\perp$ a $\pi_1 \Rightarrow \pi_1 \equiv 3x+2y-z+D=0$

$P \in \pi_1 \Rightarrow$ Las coordenadas de P tienen que verificar la ecuación de π_1:

$$3\cdot 1 + 2\cdot 2 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$

$$\boxed{\pi_1 \equiv 3x+2y-z-4=0}$$

b) $\pi_2 \parallel r$

$\left.\begin{array}{l} P(1,2,3) \\ Q(-1,0,2) \end{array}\right\} \in r$

Necesitamos 1 punto y 2 direcciones para determinar el plano:

$\vec{v}(3,2,-1)$

$\vec{QP}(2,2,1)$

$P(1,2,3)$

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv 4x-5y+2z=0}$$

c) $s \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv 3x+2y-z-4=0 \\ \pi_2 \equiv 4x-5y+2z=0 \end{cases} \longrightarrow s \equiv \begin{cases} x = \frac{4}{5}+\mu \\ y = 10\mu \\ z = -\frac{8}{5}+23\mu \end{cases}$

$r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases}$

Igualo las coordenadas:

$\begin{cases} 1+3\lambda = \frac{4}{5}+\mu \\ 2\lambda = 10\mu \\ -1-\lambda = -\frac{8}{5}+23\mu \end{cases}$ Resuelvo el sistema.

Si $\exists \lambda$ y μ que lo verifique (SCD) $\Rightarrow$ s y r se cortan en un punto.

$$\left.\begin{array}{l} 3\lambda - \mu = \frac{-1}{5} \\ 2\lambda - 10\mu = 0 \\ -\lambda - 23\mu = -\frac{3}{5} \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1/5 \\ 2 & -10 & 0 \\ -1 & -23 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$|A'| = 24 \neq 0 \Rightarrow$ rango $(A') = 3$

rango $(A) = 2$ } S. I. $\rightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

$\rightarrow$ Las rectas tienen direcciones diferentes.

③ $\vec{u}(-1,2,3)$ $\quad$ a) $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$?

$\vec{v}(2,5,-2)$

$\vec{x}(4,1,3)$

$\vec{z}(4,1,-8)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ No puede ponerse como combinación lineal.

(El sistema de ecuaciones no tiene solución).

b) $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ puede ponerse como combinación lineal.

$$\left.\begin{array}{l} -a + 2b = 4 \\ 2a + 5b = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} -2a + 4b = 8 \\ 2a + 5b = 1 \\ \hline 9b = 9 \Rightarrow b = 1 \end{array}$$

$a = 2b - 4 = -2$

$$\boxed{\vec{z} = -2\vec{u} + \vec{v}}$$

c) $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{z}$ no son linealmente independientes.

Como vemos en el apartado b), $\vec{z}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo tanto son linealmente dependientes.