

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^2 - B \cdot C^t$.

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = 2 \cdot C$.

$$a) A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$b) A \cdot X + B = 2 \cdot C \Rightarrow A \cdot X = 2 \cdot C - B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (2 \cdot C - B)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

a) Calcule la función derivada de $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}$.

b) Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes $N(t)$ que acude un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas t que llevan abiertos, es $N(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t$, $0 \leq t \leq 8$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b .

$$a) f'(x) = \frac{(e^{-2x})' \cdot (-x^2+2)^2 - e^{-2x} \cdot ((-x^2+2)^2)'}{((-x^2+2)^2)^2} = \frac{-2e^{-2x} \cdot (-x^2+2)^2 - e^{-2x} \cdot 2 \cdot (-x^2+2) \cdot (-2)}{(-x^2+2)^4} =$$

$$= \frac{-2e^{-2x} \cdot [(-x^2+2) - 2]}{(-x^2+2)^3} = \frac{2e^{-2x} \cdot x^2}{(-x^2+2)^3}$$

$$b) N(4) = 160 \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 = 160$$

$$N'(t) = 2a \cdot t + b \rightarrow \text{es máximo cuando } t=4 \Rightarrow N'(4) = 0 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot 4 + b = 0$$

$$\text{Hay que resolver } \begin{cases} 16a + 4b = 160 \\ 8a + b = 0 \end{cases}$$

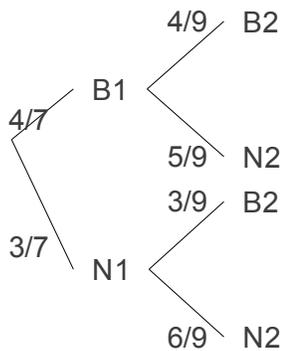
$$b = -8a \Rightarrow 16a + 4 \cdot (-8a) = 160 \Rightarrow -16a = 160 \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 80 \end{cases}$$

EJERCICIO 3

En una primera bolsa se han colocado 4 bolas blancas y 3 negras, y en una segunda bolsa 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y, sin verla, se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda. Halle la probabilidad de que:

a) La bola extraída de la segunda bolsa sea negra.

b) La bola extraída de la primera bolsa sea negra, si sabemos que la bola extraída de la segunda ha sido blanca.



$$a) P(N2) = P(N2|B1) \cdot P(B1) + P(N2|N1) \cdot P(N1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} + \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{7} = \frac{38}{63}$$

$$b) P(N1|B2) = \frac{P(B2|N1) \cdot P(N1)}{P(B2)} = \frac{\frac{3}{9} \cdot \frac{3}{7}}{1 - \frac{38}{63}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{25}{63}} = \frac{9}{25}$$

EJERCICIO 4

Una máquina está preparada para fabricar piezas de, a lo sumo, 10 cm de longitud.

Se toma una muestra de 1000 piezas, comprobándose que la media de las longitudes es de 10.0037 cm. La longitud de las piezas fabricadas por esa máquina sigue una ley Normal con desviación típica 0.2 cm.

a) Plantee el contraste de hipótesis unilateral para comprobar si con los datos de esa muestra es posible afirmar que la media de la longitud de las piezas fabricadas por la máquina es de más de 10 cm.

b) Determine la región de aceptación de la hipótesis nula de ese contraste para un nivel de significación $\alpha = 0.025$.

c) Con los datos de la muestra y usando el contraste de hipótesis del primer apartado, ¿qué conclusión se obtendría sobre la longitud media de las piezas fabricadas?

a) $n = 1000$ piezas

$$\bar{X} = 10.0037 \text{ cm}$$

$$\sigma = 0.2 \text{ cm}$$

$$H_0: \mu > 10 \text{ cm}$$

$$H_1: \mu < 10 \text{ cm}$$

b) Región de aceptación: $(-z_\alpha, +\infty)$

$$\alpha = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.975 \Rightarrow z_\alpha = 1.96$$

c) Estadístico de contraste:
$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{10.0037 - 10}{\frac{0.2}{\sqrt{1000}}} = 0.59 \in (-1.96, \infty)$$

La longitud media de las piezas fabricadas es mayor de 10 cm.

